Grundlagen der Integralrechnung

Das unbestimmte Integrieren einer Funktion f kann „quasi" als Umkehroperation des Differenzierens von f verstanden werden, d. h. unbestimmtes Integrieren macht Differenzieren im wesentlichen rückgängig. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der *Integralfunktion* von entscheidender Bedeutung, der eng gekoppelt ist mit dem Begriff der *Stammfunktion* F von f.
Darüber hinaus können Funktionen auch in bestimmter Weise zwischen zwei Grenzen a und b, die im Definitionsbereich von f liegen, integriert werden. Das bestimmte Integral von f kann ebenfalls aus der Integralfunktion von f gewonnen werden.
Nachfolgend werden die Zusammenhänge näher beleuchtet …

Definition (Stammfunktion)
Eine differenzierbare Funktion f mit

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in D_f$$

heißt *Stammfunktion von f*.

Satz
Ist D_f ein Intervall, so unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante.

Das systematische Auffinden einer (und damit aller) Stammfunktion(en) einer gegebenen Funktion nennt man *unbestimmtes Integrieren* und schreibt

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x},$$

wenn es zu f eine Stammfunktion F gibt.

Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI))
Ist $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig und $x \in [a;b]$, so ist die durch

$$\boxed{F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

definierte *Integralfunktion* F differenzierbar, und es gilt $F' = f$, d. h. F ist eine Stammfunktion von f.

Aus dem HDI lässt sich eine „Formel" zur Berechnung bestimmter Integrale herleiten:
Gemäß HDI ist die Abbildung

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f auf $[a;b]$. Wenn F irgendeine (weitere) Stammfunktion von f ist, so muss es eine Konstante c derart geben, dass

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt. Durch Einsetzen von $x = a$ erhält man

$$F(a) = c + \underbrace{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ s. unten}} = c\,.$$

Für alle $x \in [a;b]$ gilt also die Gleichung

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)\,,$$

insbesondere auch für $x = b$.

Fazit: Das Berechnen bestimmter Integrale kann durch Auswerten einer Stammfunktion F von f gemäß

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

oder in der üblichen Schreibweise

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)}$$

geschehen.

Rechenregeln und Integrationsmethoden

Nachfolgend seien $a \leq b$ und $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über $[a; b] \subseteq D_f$.
Es gibt einige elementare Rechenregeln (analog zur Differenzialrechnung)

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{(Additivität)}$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{(Homogenität)}$$

und weitere, für die Integralrechnung spezifische Regeln, nämlich

$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{(Konvention)}$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{für alle } c \in D_f \quad \text{(Intervalladditivität)}$$

Integration mittels Substitution (Substitutionsmethode)

Aus der Kettenregel der Differenzialrechnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F\big(g(x)\big) = F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

folgt mit dem HDI und der Konvention $f = F'$, dass gilt

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + c}\ .$$

Analog ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\boxed{\int\limits_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\big(g(x)\big) + c\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t}\ .$$

Beispiel (1)***:*** Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{4 + \sin^2(x)}$.

Zunächst wird der Funktionsterm wie folgt umgeformt, um im Verlauf des Integrationsprozesses eine bekannte Stammfunktion verwenden zu können

$$\frac{\cos(x)}{4 + \sin^2(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2} \cdot \frac{\cos(x)}{2}\ .$$

Mit der Wahl $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ sowie $g(x) := \frac{\sin(x)}{2}$ und daraus folgend $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2}$ erhält man mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{4+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2}\cdot\frac{\cos(x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{subst. } t = g(x)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\arctan(t)\,, \quad \text{resubst. } g(x) = t\\ &= \frac{1}{2}\cdot\arctan\big(g(x)\big) = \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{\sin(x)}{2}\right).\end{aligned}$$

Beispiel (2): Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} x\cdot\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Mit der Wahl $f(t) := \sin(t)$ sowie $g(x) := x^2$ und daraus folgend $g'(x) = 2\cdot x$ erhält man mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} x\cdot\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} 2\cdot x\cdot\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int_{x=\sqrt{\pi/6}}^{x=\sqrt{\pi/3}} g'(x)\cdot f\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{subst. } t = g(x)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\int_{t=g\left(\sqrt{\pi/6}\right)}^{t=g\left(\sqrt{\pi/3}\right)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\big[-\cos(t)\big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right).\end{aligned}$$

Partielle Integration (Methode der Produktintegration)

Aus der Produktregel der Differenzialrechnung

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

folgt, dass die Produktfunktion $f(x)\cdot g(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ ist. Das bedeutet:

$$f(x)\cdot g(x) + c = \int\big(f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

oder umgeformt

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) + c - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Für das bestimmte Integral folgt hieraus:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)\cdot g(x)+c\big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Beispiel (3): Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto \cos(\pi\cdot x)\cdot\exp(x)$.

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} f'(x) &:= \cos(\pi\cdot x) &\Longrightarrow\quad f(x) &= \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot x)\\ g(x) &:= \exp(x) &\Longrightarrow\quad g'(x) &= \exp(x)\end{aligned}$$

erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int\cos(\pi\cdot x)\cdot\exp(x)\,\mathrm{d}x &= \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad (58)\\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot\exp(x) - \int\frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot\exp(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\sin(\pi\cdot x)\cdot\exp(x) - \int\sin(\pi\cdot x)\cdot\exp(x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Das neue entstandene Integral hat dieselbe Struktur wie das ursprüngliche Integral. Letzteres kann — bis auf einen Vorfaktor — durch nochmalige Anwendung der Produktregel reproduziert werden. Wähle dazu

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &:= \sin(\pi \cdot x) & &\Longrightarrow & \tilde{f}(x) &= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \\ \tilde{g}(x) &:= \exp(x) & &\Longrightarrow & \tilde{g}'(x) &= \exp(x) \end{aligned}$$

und integriere noch einmal partiell

$$\begin{aligned} \int \sin(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x &= \int \tilde{f}'(x) \cdot \tilde{g}(x)\, \mathrm{d}x = \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) - \int \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x) - \int -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x) + \int \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x \right) . \end{aligned} \tag{59}$$

Setzt man nun das Ergebnis der Rechnung in (59) in das Ergebnis der Rechnung in (58) ein, so erhält man für die gesuchte Stammfunktion die Identität

$$\begin{aligned} \int \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(\pi \cdot x) \cdot \exp(x) - \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x) + \int \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \right) \cdot \exp(x) - \frac{1}{\pi^2} \cdot \int \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x , \end{aligned}$$

aus der sich durch Umformen und Auflösen

$$\begin{aligned} \int \cos(\pi \cdot x) \cdot \exp(x)\, \mathrm{d}x &= \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \right) \cdot \exp(x) \\ &= \frac{\pi}{\pi^2 + 1} \cdot \left(\sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \right) \cdot \exp(x) . \end{aligned}$$

ergibt.

Bemerkung:

- Der in Beispiel (3) verwendete Rechenkniff wird auch „Rüberschaufeln-Trick“ genannt.
- Hätte man zu Beginn die umgekehrte Zuordnung

  $$f'(x) := \exp(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \cos(\pi \cdot x)$$

  getroffen, so wäre man mit ähnlichem Rechenaufwand zum selben Ergebnis gelangt.

***Beispiel* (4):** Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^{\mathrm{e}^2} x \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x$.

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} f'(x) &:= x & &\Longrightarrow & f(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ g(x) &:= \ln(x) & &\Longrightarrow & g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} x \cdot \ln(x)\ \mathrm{d}x &= \int_1^{e^2} f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_1^{e^2} - \int\limits_1^{e^2} f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f\left(e^2\right) \cdot g\left(e^2\right) - f(1) \cdot g(1) - \int\limits_1^{e^2} f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^2\right)^2 \cdot \ln\left(e^2\right) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln(1) - \int\limits_1^{e^2} \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= e^4 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_1^{e^2} = e^4 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(e^2\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot e^4 - 1\right)\ .\end{aligned}$$

Weitere Integratiosregeln, -kniffe und -tricks

Mit der Abkürzung $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ für das unbestimmte Integral (= die Menge aller Stammfunktionen von f) lassen sich aus der Substitutionsregel folgende Regeln herleiten:

- $\int f(a \pm x)\,\mathrm{d}x = \pm F(a \pm x) + c$
- $\int f(b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b} \cdot F(b \cdot x) + c$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\left|g(x)\right|\right) + c$
- $\int g(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[g(x)\right]^2 + c$