Uneigentliche Integrale und deren Berechnung

Das (eindimensionale) Riemann-Integral ist nur für kompakte (= beschränkte und abgeschlossene) Intervalle definiert. Eine Verallgemeinerung auf unbeschränkte Definitionsbereiche oder auf Funktionen mit Singularitäten innerhalb des Integrationsintervalls bietet das *uneigentliche Integral*.
Das uneigentliche Integral kann als Erweiterung des Riemann-Integrals, des Regelintegrals, des Lebesgue-Integrals oder auch anderer Integralbegriffe verstanden werden.

Definition (Uneigentliches Integral)
Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar in jedem Intervall $[a; c]$ mit $a < c < b$.
Ist darüber hinaus entweder f in $[a; b)$ unbeschränkt oder $b = \infty$, so nennt man $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ ein (an der oberen Grenze) *uneigentliches Integral*.
Existiert der Grenzwert $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x$ im eigentlichen Sinne, so sagt man, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ *existiert* bzw. *konvergiert*. In diesem Falle definiert man

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x\,.}$$

Analog definiert man mit den entsprechenden Voraussetzungen ein an der unteren Grenze uneigentliches Integral als

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.}$$

Bemerkung: Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$ existiert.
Absolut konvergente uneigentliche Integrale sind wegen

$$0 \le \left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

auch konvergent.

Beispiel: Die Funktion $x \mapsto \ln\left(x^2\right)$ ist bei $x = 0$ singulär, denn $\ln\left(x^2\right) = 2 \cdot \ln(|x|) \longrightarrow -\infty$ für $x \longrightarrow 0$.
Kann das (uneigentliche) Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x$ trotzdem existieren?
Da $x \mapsto \ln\left(x^2\right)$ eine gerade Funktion ist, gilt $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^1 \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x$, falls das linke Integral existiert. Dazu werden folgende Überlegungen angestellt:
Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$. Mit Hilfe der Regel von l'Hospital erhält man das Hilfsresultat

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{\ln(c)}{1/c} = \lim_{c \to 0^+} \frac{1/c}{-1/c^2} = \lim_{c \to 0^+} -c = 0\,, \tag{62}$$

mit dessen Hilfe man

$$\begin{aligned}
\int_c^1 \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x &= \int_c^1 2 \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_c^1 \ln(x)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \Big[x \cdot \ln(x) - x\Big]_c^1 \\
&= 2 \cdot \Big(1 \cdot \ln(1) - 1 - (c \cdot \ln(c) - c)\Big) = 2 \cdot \left(-1 - \frac{\ln(c)}{1/c} + c\right) \\
&\xrightarrow{c \to 0^+} 2 \cdot (-1 - 0 + 0) = -2 = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

gemäß (62) berechnet und folglich den Wert des gegebenen uneigentlichen Integrals zu

$$\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^1 \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \ln\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot (-2) = -4$$

ermittelt.