

Polynome in $\mathbb{C}$

Polynome: Teilbarkeit, Polynomdivision, Faktorzerlegung

- TEILBARKEIT (MIT REST) BEI POLYNOMEN

Zu zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ mit $0 \leq \text{grad}(q) \leq \text{grad}(p)$ gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome $r(x)$ und $s(x)$ mit

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \text{wobei} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(q).$$

- Man sagt: „ p hat bei Division durch q den Rest r .“

Als Formel:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

- Gilt $r = 0$ und $q \neq \text{const.}$, so sagt man: „ q ist ein Teiler von p .“

Als Formel:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) \quad \text{mit} \quad \text{grad}(q) \geq 1.$$

- NULLSTELLEN UND FAKTORABSPALTUNG

Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$, d. h. $p(x_0) = 0$, so ist der Linearfaktor $s(x) = x - x_0$ ein Teiler von $p(x)$, also $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ mit einem Polynom $q(x)$, welches mittels einer Polynomdivision aus $p(x)$ und $x - x_0$ hervorgeht.

Anders formuliert:
$$\frac{p(x)}{x - x_0} = q(x)$$

- POLYNOME AUF RATIONALE NULLSTELLEN TESTEN

Für jede (vollständig gekürzte) rationale Nullstelle $x_0 = \frac{c}{d}$ teilt c das Absolutglied und d den Leitkoeffizienten des ganzzahligen Polynoms

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad ; \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z},$$

d. h. $c \mid a_0$ und $d \mid a_n$.

Sonderfall: Ist $a_n = 1$, das Polynom also normiert, so besitzt p *keine* rationalen Nullstellen. Möglicherweise gibt es aber ganzzahlige Nullstellen x_0 , die dann Teiler des Absolutgliedes a_0 sind.

- FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ mit $\text{grad}(p) = n \geq 1$ besitzt im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle x_0 .

Daraus folgt:

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \quad \text{mit einem Polynom } q(x) \text{ derart, dass } \text{grad}(q) = \text{grad}(p) - 1 \text{ gilt.}$$

Eine Nullstelle x_0 lässt sich also in Form des zugehörigen Linearfaktors $x - x_0$ abspalten.

- ZERLEGUNGSSATZ (als Folgerung aus dem Fundamentalsatz)

Jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ mit $\text{grad}(p) = n \geq 1$ lässt sich mithilfe seiner (verschiedenen) Nullstellen $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,m}$ im Bereich der komplexen Zahlen als ein Produkt

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_{0,1})^{n_1} \cdot (x - x_{0,2})^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - x_{0,m})^{n_m}$$

mit eindeutig bestimmten Exponenten $n_1, n_2, \dots, n_m$ schreiben, für die $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ gilt.