Funktionsgrenzwert

Funktionen können — ebenso wie Folgen — einen Grenzwert besitzen. Mit dem Grenzwertbegriff können wichtige Funktionseigenschaften wie ***Stetigkeit*** oder ***Differenzierbarkeit***

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

einer Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ mathematisch exakt formuliert werden.

Man unterscheidet Funktionsgrenzwerte, die das ***Funktionsverhalten im Unendlichen*** ($x \longrightarrow -\infty$ bzw. $x \longrightarrow +\infty$) beschreiben von solchen, die das ***Funktionsverhalten an einer Stelle*** ($x \longrightarrow x_0$, die *nicht* zwingend zum Definitionsbereich gehören muss) charakterisieren.

Grundlegende Zusammenhänge

Grenzwert: ε-δ-Charakterisierung

Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Häufungspunkt x_0 von D den ***Grenzwert*** g, falls es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass aus

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - g| < \varepsilon\,,$$

wobei $x \in D$ und $x \neq x_0$.

Die Funktionswerte $f(x)$ liegen also „beliebig nahe“ am Wert g, sofern sich das Argument x nur „nahe genug“ am Untersuchungspunkt x_0 befindet.

Alternativ kann man den Begriff des Funktionsgrenzwertes durch Zurückführung auf Zahlenfolgen erfassen und damit äquivalent beschreiben.

Grenzwert: Folgen-Charakterisierung

Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Häufungspunkt x_0 von D den ***Grenzwert*** g, falls gilt

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g$$

und zwar für *jede* Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$.

Bemerkung: Das Berechnen eines Funktionsgrenzwertes mit Hilfe der ε-δ-Charakterisierung kann mühsam sein, denn einerseits muss man sich einen Genzwertkandidaten „beschaffen“ und andererseits muss zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ „gefunden“ werden.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) := \dfrac{x^2-4}{3x-6}$.
Gesucht ist der Grenzwert $g = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Der Funktionsterm lässt sich vereinfachen zu $f(x) = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{3\cdot(x-2)} = \frac{x+2}{3}$. Anhand der vereinfachten Darstellung kann man bereits $g = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$ vermuten.

- ***Grenzwertnachweis per ε-δ-Charakterisierung.*** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Weiter sei $x \in U_\delta(2) \setminus \{2\}$ beliebig gewählt, d. h. es gilt $|x-2| < \delta$ für ein noch konkret anzugebendes $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

  Aus der Forderung $|f(x) - g| \overset{!}{<} \varepsilon$ ergibt sich mit

  $$|f(x) - g| = \left|\frac{x+2}{3} - \frac{4}{3}\right| = \frac{1}{3}\cdot|x-2| < \frac{1}{3}\cdot\delta\,,$$

  dass etwa mit der Wahl $\delta := 2\,\varepsilon$ ein passendes δ gefunden ist, denn damit gilt in der Tat

  $$|x-2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - g| < \frac{1}{3}\cdot\delta = \frac{1}{3}\cdot 2\,\varepsilon = \frac{2}{3}\cdot\varepsilon < \varepsilon\,. \qquad \blacksquare$$

- ***Grenzwertberechnung per Folgen-Charakterisierung.*** Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\}$ eine beliebig gewählte Folge, die gegen $x_0 = 2$ konvergiert.

  Dann folgt:

  $$f(x_n) = \frac{x_n + 2}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} = \lim_{x\to 2} f(x)\,,$$

  d. h. f besitzt bei $x_0 = 2$ den Grenzwert $g = \frac{4}{3}$. Eine Vorabkenntnis von g ist hier *nicht* notwendig. $\blacksquare$

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Liegt die Untersuchungsstelle x_0 in $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und sind a, b reelle Zahlen, so folgt aus der Existenz der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ für

- Summen bzw. Differenzen: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b\,,$
- Produkte: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b\,,$
- Quotienten: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, sofern $g(x) \neq 0$ in $U(x_0)$ und $b \neq 0$.

Bemerkung: Insbesondere gilt mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = c$ und $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = d$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)}{\gamma \cdot u(x) \pm \delta \cdot v(x)} = \frac{\alpha \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \beta \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\gamma \cdot \lim\limits_{x\to x_0} u(x) \pm \delta \cdot \lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = \frac{\alpha \cdot a \pm \beta \cdot b}{\gamma \cdot c \pm \delta \cdot d}\,, \qquad \text{sofern } \gamma \cdot c \pm \delta \cdot d \neq 0\,.$$

Beispiel: Umformen des Funktionsterms, um Regeln anzuwenden und bekannte Grenzwerte zu nutzen.

$$\frac{3 \cdot \left(\sqrt{x^2+9}-3\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-2\right)^2}{2x \cdot \sin(x)} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-1} \cdot (x-4)^2$$

$$\xrightarrow{x\to 0} \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^{-1} \cdot (-4)^2 = \boxed{1 = \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \left(\sqrt{x^2+9}-3\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-2\right)^2}{2x \cdot \sin(x)}}\,,$$

wobei $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{1}{6}$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ als bekannt vorausgesetzt wurden. ■

Methoden und Beispiele

Die Differentialrechung liefert ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung eines Funktionsgrenzwertes.

Regel von l'Hospital

Der zu untersuchende Term habe die Bauart $\frac{f(x)}{g(x)}$, die Stelle x_0 liege in $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und es gelte:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,
d. h. für $x \longrightarrow x_0$ ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ „$\frac{0}{0}$" bzw. „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$".

(ii) In einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$ ist $g(x) \neq 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert (evtl. nur im uneigentlichen Sinne, d. h. der Grenzwert ist $-\infty$ oder $+\infty$).

Dann ist $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}\,, \quad$ sofern f und g in $\dot{U}(x_0)$ differenzierbar sind.

Beispiel: Iterierte Anwendung der Regel von l'Hospital.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)}} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(1-\cos(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(x)} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos(x)} = \frac{2}{1} \boxed{= 2}$$ ■

Erweiterte Regel von l'Hospital

Die l'Hospital-Regel kann auch in weiteren unbestimmten Fällen wie „$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „0^0“, „1^∞“ oder „∞^0“ nützlich sein. Dazu muss man die Terme in den Typ „$\frac{0}{0}$“ oder den Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“ umformen. Etwa:

$$\underbrace{f(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to \infty} = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} =: \frac{\overbrace{u(x)}^{\to 0}}{\underbrace{v(x)}_{\to 0}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{f(x)}_{\to\infty} - \underbrace{g(x)}_{\to\infty} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} =: \frac{\overbrace{u(x)}^{\to 0}}{\underbrace{v(x)}_{\to 0}}$$

Beispiel: Überführung in einen der Standardfälle.

„$\pm\infty - (\pm\infty)$“-Situation: Überführe diese in einen „$\frac{0}{0}$“-Typ und wende zweifach l'Hospital an.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1} \overbrace{\frac{x\cdot\ln(x) - (x-1)}{(x-1)\cdot\ln(x)}}^{„\frac{0}{0}“} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{1\cdot\ln(x) + (x-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x\cdot\ln(x)}{x\cdot\ln(x) + (x-1)}}_{„\frac{0}{0}“} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)+1+1} = \frac{0+1}{0+1+1} = \frac{1}{2} \qquad \blacksquare$$

Tipps und Tricks

A Funktionsterme umformen (kürzen, erweitern, faktorisieren, zerlegen)

Beispiel: Kürzen nach Faktorisieren.

$$\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2-1} = \frac{e^x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \frac{e^x}{x+1} \xrightarrow{x\to 1} \frac{e^1}{1+1} = \frac{e}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2-1} \qquad \blacksquare$$

B „Binomitrick“ anwenden

Beispiel: Wurzelterme so erweitern, dass die dritte binomische Formel anwendbar ist.

$$\sqrt{4x^2+3x} - 2x = \frac{\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x}+2x} = \frac{4x^2+3x-(2x)^2}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}\right)}+2x}$$

$$\overset{(x>0)}{=} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4} = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right) \qquad \blacksquare$$

C lim-Zeichen ins Funktionsargument „hineinziehen“

Bei *stetigen* Funktionen kann der Grenzwert als Funktionswert berechnet werden.

Stetige Funktion

Bei einer in x_0 *stetigen* Funktion f kann man den Grenzwert für $x \to x_0$ durch Ausführen des Grenzübergangs im Argument berechnen:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)\,.$$

Beispiele: Insbesondere trifft dies auch auf verkettete Funktionen zu.

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)\right]^n = [f(x_0)]^n$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)} = a^{f(x_0)}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a(f(x)) = \log_a\left(f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)\right) = \log_a(f(x_0))$

D Variable steht im Exponenten einer Potenz

Umformung mit Hilfe des „Identitätstricks" $\mathrm{id} = \exp \circ \ln$.

ln-exp-Umformung

Bei Problemen der Form $[f(x)]^{p(x)}$ hilft oft eine Umformung mittels Logarithmengesetz $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$:

$$[f(x)]^{p(x)} = \mathrm{id}\left([f(x)]^{p(x)}\right) = \exp\left(\ln\left([f(x)]^{p(x)}\right)\right) = \exp\left(p(x) \cdot \ln(f(x))\right)$$

Beispiel: Überführung in einen der Standardfälle.

„0^0"-Situation: Forme diese in einen „$\frac{-\infty}{\infty}$"-Typ um und wende l'Hospital an.

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} x^x} = \lim_{x\to 0+} \exp(\ln(x^x)) \overset{\exp}{\underset{\text{stetig}}{=}} \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \overbrace{x \cdot \ln(x)}^{„0\cdot(-\infty)“}\Bigr) = \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \overbrace{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}}^{„\frac{-\infty}{\infty}“}\Bigr)$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\Bigr) = \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} -x\Bigr) = \exp(0) \boxed{= 1}$$ ■

E Teilterme in Funktionstermen substituieren

Beispiel: Im Falle $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ liegt für $x \longrightarrow \infty$ eine „$\frac{\infty}{\infty}$"-Situation vor. Jedoch scheitert eine (selbst mehrfache) Anwendung der l'Hospital-Regel zur Ermittlung des Grenzwertes, denn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \ldots,$$

d. h. man dreht sich im Kreis. Abhilfe schafft die Substitution $y := e^x$. Mit $x \longrightarrow \infty$ folgt $y \longrightarrow \infty$ und damit

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y + y^{-1}}{y - y^{-1}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\cancel{y} \cdot (1 + y^{-2})}{\cancel{y} \cdot (1 - y^{-2})} = \frac{1+0}{1-0} \boxed{= 1}$$ ■

F Potenzreihendarstellungen in Kombination mit dem Landau-Kalül verwenden

Bemerkung: Das Rechnen mit dem Landau-Kalkül zur Darstellung des Restgliedes $R_k(x)$ einer Potenzreihe führt ggf. schneller zum Ziel als die l'Hospital-Regel. Für die Sinus- und Kosinusfunktion gilt:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^5\right),$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!} + O\left(x^4\right).$$

Hierin bedeutet $R_k(x) = O(x^k)$, dass $|R_k(x)| \leq C \cdot |x|^k$ für alle $x \in U_\varepsilon(0)$, was wiederum besagt, dass $R_k(x)$ „ebenso schnell" gegen 0 strebt wie x^k, wenn x gegen 0 strebt.

Beispiel: Ersetze Funktionen durch ihre Potenzreihendarstellung und nutze Landau-Kalkül.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(x)-x}{x\cdot(1-\cos(x))}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^5\right)\right) - x}{x \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + O\left(x^4\right)\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3} \cdot \bigl(-\frac{1}{3!} + \overbrace{O\left(x^2\right)}^{\to 0}\bigr)}{\cancel{x^3} \cdot \left(\frac{1}{2!} + O\left(x^2\right)\right)} = -\frac{2!}{3!} \boxed{= -\frac{1}{3}}$$ ■

G Einschnüren und zuziehen (Folterkellermethode)

Nutze die ε-δ-Charakterisierung des Funktionsgrenzwertes im …

Einschließungskriterium

Schätze den (in der Grenzwertdefinition auftretenden) Abstand $|f(x) - g|$ nach oben gegen einen nicht-negativen Term $M(x)$ ab, für den $\lim\limits_{x \to x_0} M(x) = 0$ gilt. Damit erhält man:

$$0 \leq |f(x) - g| \leq M(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x) - g| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = g\,.$$

Beispiel: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{|x|} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ kann man (z. B. aufgrund eines Graphenplots) für $x \to 0$ den Grenzwert $g = 0$ vermuten. Das Einschließungskriterium bestätigt diese Annahme:

$$0 \leq \Big|f(x) - \underbrace{0}_{=g}\Big| = \left|\sqrt{|x|} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \sqrt{|x|} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\sqrt{|x|}}_{=M(x)} \xrightarrow{x \to 0} \sqrt{|0|} = 0\,.$$

H Ödes Funktionsverhalten nutzen

Nutze das monotone Verhalten und die Beschränktheit der Funktion im …

Monotoniekriterium

Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ monoton und beschränkt, so konvergiert sie für $x \to \pm\infty$. Verallgemeinert gilt für f mit

Definitionsbereich	*Monotonie*	*Beschränktheit*		*konvergiert für*
(a, ∞)	wachsend	nach oben	$\Longrightarrow$	$x \to +\infty$
(a, ∞)	fallend	nach unten	$\Longrightarrow$	$x \to +\infty$
$(-\infty, b)$	wachsend	nach unten	$\Longrightarrow$	$x \to -\infty$
$(-\infty, b)$	fallend	nach oben	$\Longrightarrow$	$x \to -\infty$

Beispiel: Untersuche die Funktion $f : [1; \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ für $x \to \infty$ auf Konvergenz

- f ist monoton fallend, denn $f'(x) = (1 - x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \leq 0$ für alle $x \geq 1$.
- f ist nach unten beschränkt, denn $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \geq 1 \cdot 0 = 0$ für alle $x \geq 1$.

Gemäß obiger Variante des Monotoniekriteriums konvergiert f für $x \to \infty$. Es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, was gesondert gezeigt werden muss!

Wichtige Hinweise

1 Rückblick

- Ein Analogon zur Regel von l'Hospital für Funktionen ist für Zahlenfolgen der

  Satz (Stolz–Cesàro)
  Sind (a_n), (b_n) reelle Zahlenfolgen und gilt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} & (b_n) \text{ fällt streng monoton mit } \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0 \\ \vee & (b_n) \text{ steigt streng monoton mit } \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty \end{cases}$$

  und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, so gilt $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}}$.

2 Ausblick

- Funktionsgrenzwerte sind fundamental für eine Vielzahl von Themen der reellen sowie der komplexen Analysis. Beispielsweise bauen Differential- und Integralrechnung auf dem Grenzwertbegriff auf.
- Im Zusammenhang mit Funktionenfolgen und -reihen unterscheidet man die Art und Weise der Konvergenz. Beispielsweise untersucht man Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Das Kleingedruckte

- Viele durchgerechnete Beispiele von Grenzwertuntersuchnungen (auch weiterführende sowie Grenzfälle) finden Sie auf den Wikipedia-Seiten zu den verschiedenen Begriffen und Stichworten. Es lohnt sich, auch mal einen Blick auf die englisch-, französisch-, spanischsprachigen Seiten zu werfen.
- Die zu Ihrer Vorlesung empfohlene Literatur behandelt das Thema Funktionsgrenzwerte zum Teil in (erheblich) größerer Tiefe. Auch dort finden sich viele interessante, meist verständlich durchgerechneter Beispiele.