Potenzreihen

Potenzreihen gehören zu den wichtigsten Erkenntnismitteln der Analysis. Viele (elementare) Funktionen können erst durch Potenzreihen auf streng analytische Weise definiert werden. So können Werte $f(x)$ einer Funktion, die eine Taylorreihendarstellung (= Potenzreihendarstellung mit speziellen Koeffizienten, siehe Wegweiser „Taylorreihen“) besitzt, an *jeder* gewünschten Stelle x mit *jeder* gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Diese Möglichkeit stellt den Dreh- und Angelpunkt für jegliches numerisches Rechnen mit Funktionen dar.

In der *Funktionentheorie* spielen Potenzreihen eine zentrale Rolle, wo sie oft eine sinnvolle Fortsetzung reeller Funktionen in die komplexe Zahlenebene erlauben. Viele grundlegende Ideen können im Bereich der *reellen Zahlen* entwickelt und dann auf den komplexen Fall übertragen werden.

Über die Untersuchungen in der (komplexen) Analysis hinaus treten Potenzreihen auch in der technischen Anwendung auf, beispielsweise in der digitalen Regelungstechnik (im Zusammenhang mit der sog. Z-Transformation).

Grundlegende Zusammenhänge

Potenzreihe

Eine ***Potenzreihe*** ist eine Reihe vom Typ

$$P(x;x_0) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k\right) \qquad (1)$$

mit x, x_0 und a_k aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

- Die ***Partialsummen*** der Potenzreihe

  $$s_n(x;x_0) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-x_0)^k \qquad (2)$$

  sind Polynome n-ten Grades in x.

  Per Definition ist die Potenzreihe nichts anders als die Folge der Partialsummen, d. h.

  $$P(x;x_0) = \left(s_n(x;x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \qquad (3)$$

- Die Koeffizienten a_k heißen ***Reihenglieder***.
- Die Stelle x_0 wird ***Entwicklungspunkt*** genannt und stellt einen Parameter dar.

  Für $x_0 = 0$ ergibt sich die in den Anwendungen häufig auftretende, spezielle Form

  $$P(x) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k\right). \qquad (4)$$

  („Entwicklung um den Nullpunkt.“)
- Mit der Substitution $y := x - x_0$ kann die allgemeine Form (1) auf die spezielle Form (4) zurückgeführt werden.

Konvergenz einer Potenzreihe

Die Menge aller x-Werte, für welche die Potenzreihe konvergiert, heißt ***Konvergenzbereich***.
Der ***Wert einer Potenzreihe***

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \qquad (5)$$

hängt im Falle der Konvergenz sowohl von den Reihengliedern a_k, dem Entwicklungspunkt x_0 als auch vom Wert der Variablen x ab.

- Eine Potenzreihe konvergiert mindestens in x_0.
- Falls die Potenzreihe nicht nur in x_0 konvergiert, so gilt:

  Im Falle einer *komplexwertigen Variable* $x \in \mathbb{C}$ gibt es ein maximales $0 < r \leq \infty$ derart, dass die Potenzreihe in der offenen Kreisscheibe $U_r(x_0)$ konvergiert. Die Zahl r wird aus diesem Grunde als ***Konvergenzradius*** bezeichnet.

  Im Falle einer *reellen Potenzreihe* entartet $U_r(x_0)$ zu $(x_0 - r; x_0 + r)$, dem so genannten ***Konvergenzintervall***.
- Eine Potenzreihe kann auch in Randpunkten von $U_r(x_0)$ konvergieren. Die Menge aller Punkte, in denen die Potenzreihe konvergiert, wird als ***Konvergenzbereich*** bezeichnet.

Bemerkung: Eine Potenzreihe kann in ihrem Konvergenzbereich gemäß der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto P(x;x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$ als eine Funktion aufgefasst werden.

Eigenschaften von Potenzreihen

- Eine Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzbereichs absolut.
- Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich *gliedweise addiert bzw. subtrahiert* oder auch gemäß der *Cauchy-Produktformel multipliziert* werden. Die dabei neu entstehenden Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen.
- Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzbereichs *beliebig oft gliedweise differenziert und auch integriert* werden. Die dabei entstehenden neuen Potenzreihen besitzen denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Beobachtung: Potenzreihen dürfen in ihrem Konvergenzbereich wie *Polynomfunktionen* behandelt werden.

Methoden und Beispiele

Sowohl das *Wurzel-* als auch das *Quotientenkriterium für Zahlenreihen* (siehe Wegweiser „Zahlenreihen“) können auch zur Festellung des Konvergenzverhaltens einer Potenzreihe $P(x;x_0) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k\right) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ genutzt werden, sofern man $b_k := a_k \cdot (x-x_0)^k$ setzt und x als feste Zahl betrachtet.

Berechnung des Konvergenzradius' einer Potenzreihe

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}\cdot(x-x_0)^{k+1}}{a_k\cdot(x-x_0)^k}\right| = |x-x_0|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

Wurzelkriterium

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|\cdot|x-x_0|^k} = |x-x_0|\cdot\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

In beiden Fällen konvergiert die Potenzreihe $P(x;x_0)$ nach den Kriterien für Zahlenreihen, falls $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| < 1$ bzw. $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|} < 1$ gilt, woraus man eine Vorschrift zur Ermittlung des Konvergenzradius' r erhält:

$$|x-x_0|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \overset{!}{<} 1 \quad\Longrightarrow\quad |x-x_0| < \boxed{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| =: r} \tag{6}$$

$$|x-x_0|\cdot\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \overset{!}{<} 1 \quad\Longrightarrow\quad |x-x_0| < \boxed{\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} =: r} \tag{7}$$

- Falls $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$ bzw. $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 0$ ist, so setzt man $r := \frac{1}{0} := \infty$ und damit konvergiert $P(x;x_0)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) absolut.
- Falls $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \infty$ bzw. $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ ist, so setzt man $r := \frac{1}{\infty} := 0$ und damit konvergiert $P(x;x_0)$ nur im Entwicklungspunkt $x = x_0$.

Bemerkung: Die Potenzreihe konvergiert in $U_r(x_0)$, was im Komplexen der offenen Kreisscheibe um x_0 mit Radius r und im Reellen dem offenen Intervall $(x_0 - r; x_0 + r)$ entspricht. In Randpunkten von $U_r(x_0)$ kann die Reihe u. U. ebenfalls konvergieren. Außerhalb von $\overline{U_r(x_0)}$ divergiert die Reihe definitiv.

Beispiel: Vergleich von Wurzel- und Quotientenkriterium. Untersucht werden soll die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}\cdot x^k \quad\text{worin } a_k = \frac{1}{k\cdot 2^k}\,.$$

Berechne Konvergenzradius per ***Quotientenkrit.***:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{(k+1)\cdot 2^{k+1}}{k \cdot 2^k} = 2\cdot\frac{k+1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 2\,.$$

Damit ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \boxed{2 = r}\,.$

Berechne Konvergenzradius per ***Wurzelkrit.***:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k\cdot 2^k}\right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}}\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}\,.$$

Damit ist $\dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2 = r}\,.$

Wie zu erwarten war, liefern beide Kriterien denselben Konvergenzradius. Die Reihe konvergiert (zumindest) für alle x mit $|x| < 2$ und sie divergiert auf jeden Fall für alle x mit $|x| > 2$. ■

Berechnung des Konvergenzbereichs einer Potenzreihe

Falls der ***Konvergenzbereich*** gefragt ist, muss das Konvergenzverhalten der Reihe zusätzlich in den Randpunkten von $U_r(x_0)$ untersucht werden:

- Im Falle einer *reellen Potenzreihe* sind dazu $x_l := x_0 - r$ bzw. $x_r := x_0 + r$ für x einzusetzen und die jeweils entstehende Zahlenreihe ist mit den entsprechenden Kriterien auf Konvergenz zu überprüfen.
- Im Falle einer *komplexen Potenzreihe* ist der Rand von $U_r(x_0)$ die Kreislinie, die aus unendlich vielen Punkten besteht. Konvergenzuntersuchungen sind daher nur in einzelnen solcher Randpunkte möglich!

Beispiele: Die Koeffizienten der Reihenglieder einer Potenzreihe bestimmen das Konvergenzverhalten der Reihe. Die Auswirkungen einer Modifikation der Koeffizienten a_k auf den Konvergenzbereich werden nachfolgend untersucht. Für die um $x_0 = 0$ entwickelten Potenzreihen

$$P(x) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right), \quad Q(x) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot x^k\right), \quad R(x) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot x^k\right).$$

soll das Konvergenzintervall über den Konvergenzradius berechnet und das Konvergenzverhalten in den Randpunktenuntersucht werden.

- $P(x)$ ist die im vorherigen Beispiel untersuchte *geometrische Reihe* mit Wachstumsfaktor $q = x$, die für $|q| = |x| < 1$ konvergiert.

  Untersuche die Randpunkte gesondert:

  $x_l = -1$: $\quad P(-1) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\right) = 1-1+1-1\pm\ldots$ ist *divergent*, denn die Folge der Partialsummen hat die beiden Häufungswerte 0 und 1.

  $x_r = +1$: $\quad P(1) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1\right) = 1+1+1+1+\ldots$ ist *bestimmt divergent*, denn die Folge der Partialsummen wächst über alle Grenzen.

  Fazit: Der Konvergenzbereich von $P(x)$ ist folglich das offene Intervall $\boxed{(-1;1)}$.

- Für $Q(x)$ verwende das Wurzelkriterium:

  $$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{1} = 1 \implies r = 1\,,$$

  d. h. $Q(x)$ konvergiert mind. für alle $x \in (-1;1)$.

  Untersuche die Randpunkte gesondert:

  $x_l = -1$: $\quad Q(-1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(-1)^k$ ist die konvergente *alternierende harmonische Reihe*.

  $x_r = +1$: $\quad Q(+1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot 1^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist die gegen ∞ divergierende *harmonische Reihe*.

  Fazit: Der Konvergenzbereich von $Q(x)$ ist somit das halboffene Intervall $\boxed{[-1;1)}$.

- Für $R(x)$ verwende das Wurzelkriterium:

  $$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2 = 1 \implies r = 1\,,$$

  d. h. $R(x)$ konvergiert mind. für alle $x \in (-1;1)$.

  Untersuche die Randpunkte gesondert:

  $x_l = -1$: $\quad R(-1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot(-1)^k$ ist konvergent.

  $x_r = +1$: $\quad R(+1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot 1^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ist ebenfalls konvergent.

  Fazit: Der Konvergenzbereich von $R(x)$ ist somit das abgeschlossene Intervall $\boxed{[-1;1]}$.

Tipps und Tricks

1 Termvereinfachungen zur Arbeitsersparnis

Um den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ bzw. den größten Häufungswert $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ in effizienter Weise zu berechnen, empfiehlte es sich, zunächst den Term $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|}$ zu vereinfachen und *danach* den Grenzübergang $k \to \infty$ auszuführen.

Beispiel: Wo konvergiert $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(5x)^k}{4^k\cdot k^2}\right)$ für $x\in\mathbb{R}$?

Umformung in die Standardform (1) liefert die Koeffizienten a_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5x)^k}{4^k\cdot k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{k^2}\cdot x^k \quad \text{mit } a_k=\left(\frac{5}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{k^2}\,.$$

Berechne den Konvergenzradius per Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{\left(\frac{5}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{k^2}}=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2\xrightarrow{k\to\infty}\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^2=\frac{5}{4}\,.$$

Es ergibt sich $\dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}=\boxed{\frac{4}{5}=r}\,.$ ∎

2 Potenzreihen, die nicht der Standardform entsprechen

Sämtliche Berechnungsformeln für den Konvergenzradius können nur direkt angewandt werden, wenn die Potenzreihe in der „Standardform" (1) bzw. (4) gegeben ist. Andernfalls sind die „korrekten" Koeffizienten durch den Vergleich mit einer der Standardformen zu ermitteln.

Beispiel: Wo konvergiert $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k\cdot x^{2k}\right)$ für $x\in\mathbb{R}$?

Falsch wäre es, die Folge der Koeffizienten durch

$$(a_k)=2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,\ldots$$

anzugeben, was auf den *falschen* Konvergenzradius

$$r_{\text{falsch}}=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}\overset{\text{↯}}{=}\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(2^k\right)^{\frac{1}{k}}}=\frac{1}{2}$$

führen würde. Hingegen liest man an der Darstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot x^{2k}=2^0+0\cdot x+2^1\cdot x^2+0\cdot x^3+2^2\cdot x^4+0\cdot x^5+\ldots$$

die *korrekte* Koeffizientenfolge

$$(a_k)=2^0,0,2^1,0,2^2,0,\ldots$$

ab. Sie liefert den *korrekten* Konvergenzradius

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}\overset{\checkmark}{=}\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{|a_{2k}|}}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(2^k\right)^{\frac{1}{2k}}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

3 Nicht alle Wege führen über das Quotientenkriterium (nach Rom ☺)

Das Quotientenkriterium für Potenzreihen ist *nicht* universell gültig, da die Koeffizienten a_k ab einem gewissen Index k_0 von null verschieden seien müssen, um eine Division durch null zu vermeiden. Des Weiteren muss der Limes in $\overline{\mathbb{R}}=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ existieren.

Beispiel: Für die Potenzreihe $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+(-1)^k\right)\cdot x^k\right)$ ist das Quotientenkriterium *nicht* anwendbar.

Die Koeffizienten lauten $a_k=1+(-1)^k$. Tabelliert erhält man

k	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
a_k	0	2	0	2	0	2	$\ldots$

Für alle ungeraden Indizes k verschwinden die Koeffizienten a_k. Folglich können für alle geraden k die Quotienten $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ wegen des verschwindenden Nenners *nicht* gebildet werden.
Dieses Problem des Quotientenkriteriums umgeht man durch Anwendung des Wurzelkriteriums. Den limes superior der Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)$ erhält man durch Auswahl derjenigen Teilfolge, die den größten Grenzwert besitzt. Anhand obiger Tabelle wählt man die Teilfolge (a_{k_n}) mit $k_n=2n$. Damit folgt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|1+(-1)^k\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2}=1\,.$$

Folglich ist $\dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}=\dfrac{1}{1}=\boxed{1=r}\,.$