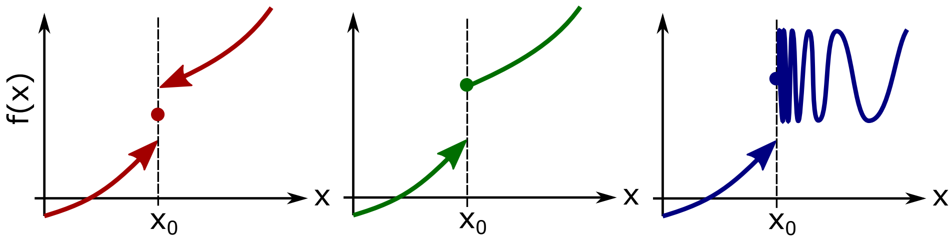
Stetigkeit

Nicht für jede Funktion f und jede Stelle $x_0 \in D_f$ gilt zwangsläufig $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Grafik zeigt verschiedene „Versagensfälle“:



Enthält der Graph einer Funktion f weder Sprungstellen noch Löcher (noch weist er sonstiges „irreguläres“ Verhalten auf), so nennt man f stetig. Dies ist dann der Fall, wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments auch nur (beliebig) kleine Änderungen des Funktionswertes nach sich ziehen.

Grundlegende Zusammenhänge

1 Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle

Es gibt verschiedene gleichwertige Möglichkeiten, um den Begriff der Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D_f$ zu charakterisieren.

Grenzwertcharakterisierung

Eine auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt ***stetig*** in $x_0 \in D$, falls

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

Insbesondere gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.
Stetigkeit von f in x_0 bedeutet daher, dass *Grenzwertbildung und Anwendung der Funktion vertauschbar* sind, d. h. die Grenzwertbildung darf direkt im Argument durchgeführt werden.

Bemerkung: Die Grenzwertcharakterisierung ist oft die schnellste Methode, um die Stetigkeit in einem Punkt zu überprüfen.

Beispiel: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-4}{3x-6}, & \text{falls } x \neq 2 \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

ist wegen

$$f(x) = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{3\cdot(x-2)} = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{x\to 2} \frac{4}{3} = f(2)$$

in $x_0 = 2$ stetig. ∎

Folgencharakterisierung

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***stetig*** in $x_0 \in D$, falls gilt

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$$

und zwar für *jede* solche Folge $(x_n) \subseteq D$.

Bemerkung: Häufig kann man die Folgencharakterisierung zur Konstruktion von Gegenbeispielen verwenden. Findet man *eine* Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \to x_0$, deren Funktionswerte $f(x_n)$ eine *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergierende oder gar divergierende Folge $(f(x_n))$ bilden, so ist die Funktion in x_0 *unstetig*.

Beispiel: Ist die durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion in $x_0 = 0$ stetig?
Nein, denn wählt man als gegen 0 konvergierende Folge $x_n := \frac{1}{2n}$, so ergibt sich für die zugehörige Folge der Funktionswerte

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \cos(n\cdot 2\pi) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = f(0) = f(x_0),$$

also eine *nicht* gegen $f(x_0)$ strebende Folge. ∎

ϵ-δ-Charakterisierung

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist ***stetig*** in $x_0 \in D$, falls zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart existiert, dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und zwar für alle $x \in D$ mit der genannten Eigenschaft.

Bemerkung: Dieses Stetigkeitskriterium eignet sich vorwiegend zur theoretischen Beweisführung.

2 Stetigkeit einer Funktion auf ihrem Definitionsbereich

Punktuelle Stetigkeitsuntersuchungen lassen sich an jeder Stelle des Definitionsbereichs einer Funktion durchführen, somit auch auf dem gesamten Definitionsbereich.

Stetige Funktionen

Ist eine Funktion f in *jedem* Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, so nennt man sie eine ***stetige Funktion***.

Beispiel: Die ***Sprungfunktion***

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \sigma(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1\,, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist fast überall stetig. Ausnahmepunkt ist $x_0 = 0$, denn dort springt σ von 0 auf 1. Deshalb ist die Funktion insgesamt eine nicht stetige Funktion. ■

Methoden und Beispiele

Bei der Untersuchung einer Funktion f auf ***Stetigkeit*** sind folgende Aspekte zu beachten:

- Soll die Untersuchung in einzelnen Punkten oder auf dem gesamten Definitionsbereich von f erfolgen?
- Ist f durch einen einzigen, ggf. komplex aufgebauten Term gegeben oder ist f abschnittsweise erklärt?
- Soll entschieden werden, ob sich f in gewisse Randpunkte des Definitionsbereichs stetig fortsetzen lässt?

Bekannte stetige Funktionen

Die so genannten ***elementaren Funktionen*** sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Bemerkung: Zu den elementaren Funktionen zählen (grob) alle Funktionen, die sich durch Grundrechenarten $(+, -, \cdot, /)$, Verkettung $(\circ)$, Betragsbildung, Differentiation oder Integration aus speziellen Funktionen bilden lassen.

Diese Funktionen sind

- Potenzfunktionen $x \mapsto x^k$
- Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$
- trigonometrische Funktionen

  $x \mapsto \sin(x)$ bzw. $x \mapsto \cos(x)$ und
- hyperbolische Funktionen

  $x \mapsto \sinh(x)$ bzw. $x \mapsto \cosh(x)$

Sowie deren Umkehrfunktionen, d. h.

- Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[k]{x}$
- Logarithmusfunktionen $x \mapsto \log_a(x)$
- Arkusfunktionen

  $x \mapsto \arcsin(x)$ bzw. $x \mapsto \arccos(x)$ und
- Areafunktionen

  $x \mapsto \operatorname{arsinh}(x)$ bzw. $x \mapsto \operatorname{arcosh}(x)$

Beispiel: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \;\text{ mit }\; x \mapsto f(x) := \frac{2 \cdot x^2 + \mathrm{e}^{2 \cdot \sin(x)}}{\big|\ln\big(\cosh(x)\big)\big|}$$

ist eine *Komposition* elementarer Funktionen. Folglich ist f auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. ■

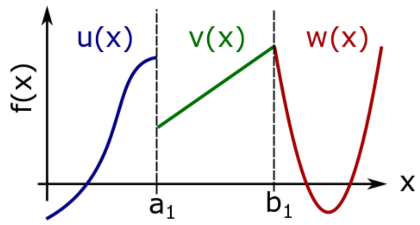
Abschnittsweise definierte Funktion

Eine aus mehreren Termen $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, … zusammengesetzte Funktion f nennt man ***abschnittsweise definiert***.

Beispiel: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x < a_1 \\ v(x), & \text{falls } a_1 \le x < b_1 \\ w(x), & \text{falls } b_1 < x \end{cases}$$

ist abschnittsweise erklärt. Die Stellen a_1 und b_1 werden dabei als ***Abschnittsgrenzen*** bezeichnet.



Bemerkung: Zur Unterscheidung werden Abschnittsgrenzen, die *innerhalb* des Definitionsbereichs D liegen, mit a_j bezeichnet, Abschnittsgrenzen *außerhalb* des Definitionsbereichs mit b_j, wobei $b_j \in \overline{D} \setminus D = \partial D$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Abschnittsweise definierte Funktion f auf Stetigkeit untersuchen

$\boxed{1}$ Identifiziere die Abschnittsgrenzen a_1, a_2, a_3, … *innerhalb* und b_1, b_2, b_3, … *außerhalb* des Definitionsbereichs und prüfe, ob f in den Bereichen zwischen je zwei benachbarten Abschnittsgrenzen eine *elementare Funktion* (d. h. eine Komposition aus stetigen Funktionen) ist.

- Falls ja, so ist f auf dem offenen Intervall zwischen den jeweiligen Abschnittsgrenzen stetig.

$\boxed{2}$ Prüfe, ob an den Abschnittsgrenzen $a_1, a_2, a_3, \ldots \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a_j} f(x)$ existiert.

- Falls nicht, so ist f in a_j *unstetig*.
- Falls der Grenzwert existiert, prüfe, ob $\lim\limits_{x \to a_j} f(x) = f(a_j)$ ist.
  - Falls nicht, so ist f in a_j *unstetig*.
  - Falls Grenzwert und Funktionswert übereinstimmen, so ist f in a_j *stetig*.

$\boxed{3}$ Gibt es Abschnittsgrenzen b_1, b_2, b_3, … *außerhalb* des Definitionsbereichs, so kann man untersuchen, ob sich f dort ***stetig fortsetzen*** lässt. Prüfe dazu, ob für b_j der Grenzwert $\lim\limits_{x \to b_j} f(x)$ existiert.

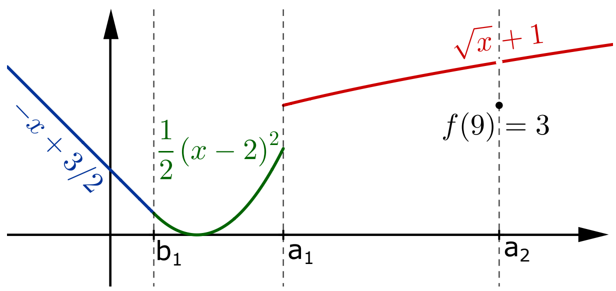
- Falls nicht, so ist f in b_j *nicht* stetig fortsetzbar.
- Falls der Grenzwert existiert, so verwende $\lim\limits_{x \to b_j} f(x)$ als Funktionswert $\widetilde{f}(b_j)$ der Fortsetzung.

Bemerkung: Zur Grenzwertbestimmung an Abschnittsgrenzen ist folgender Zusammenhang nützlich: Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert an einem Punkt x_0 genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

Beispiel: Untersuchung einer abschnittsweise definierten Funktion auf Stetigkeit.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit}$$

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} -x + \frac{3}{2}, & \text{falls } x < 1 \\ \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2, & \text{falls } 1 < x \le 4 \\ \sqrt{x} + 1, & \text{falls } x > 4 \wedge x \ne 9 \\ 3, & \text{falls } x = 9 \end{cases}$$



$\boxed{1}$ *Abschnittsgrenzen und Zwischenbereiche:*

Die Abschnittsgrenzen sind $b_1 = 1$ (außerhalb von D_f), $a_1 = 4$ und $a_2 = 9$ (beide innerhalb von D_f). Alle drei Grenzen insgesamt definieren vier zusammenhängende Bereiche (offene Intervalle).

In den einzelnen Bereichen sind die jeweiligen Funktionsterme elementare Funktionen und folglich stetig.

$\boxed{2}$ *Funktionsverhalten an Abschnittsgrenzen:*

Überprüfe dazu, ob f an den „inneren“ Abschnittsgrenzen links- und rechtsseitige Grenzwerte besitzt.

$\boldsymbol{a_1 = 4}$:

Linksseitig: Links- und rechtsseitiger Grenzwert: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 \xrightarrow{x \nearrow 4} \frac{1}{2} \cdot (4-2)^2 = 2 = \lim\limits_{x \to 4-} f(x)$

Rechtsseitig: $f(x) = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow{x \searrow 4} \sqrt{4} + 1 = 3 = \lim\limits_{x \to 4+} f(x)$

Wegen $\lim\limits_{x \to 4-} f(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x \to 4+} f(x)$ besitzt f in $a_1 = 4$ *keinen* Grenzwert und ist somit dort *unstetig*.

$\boldsymbol{a_2 = 9}$:

Da links- und rechtsseitiger Funktionsterm übereinstimmen, muss *keine* Unterscheidung bzgl. der Richtung der Annäherung an die Untersuchungsstelle vorgenommen werden:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow{x \to 9} \sqrt{9} + 1 = 4 = \lim_{x \to 9} f(x)$$

Wegen $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = 4 \neq 3 = f(9)$ ist f in $a_2 = 9$ *unstetig*.

$\boxed{3}$ *Auf stetige Fortsetzbarkeit prüfen:*

$\boldsymbol{b_1 = 1}$:

Diese Stelle ist eine „äußere“ Abschnittsgrenze, gehört also nicht zum Definitionsbereich von f, und folglich ist eine Untersuchung auf Stetigkeit dort obsolet. Allerdings kann man prüfen, ob sich f in $b_1 = 1$ hinein stetig fortsetzen lässt:

Linksseitig: $f(x) = -x + \frac{3}{2} \xrightarrow{x \nearrow 1} -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$.

Rechtsseitig: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 \xrightarrow{x \searrow 1} \frac{1}{2} \cdot (1-2)^2 = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$.

Beide einseitigen Grenzwerte stimmen überein, folglich gilt: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Durch die Festlegung $\widetilde{f}(1) := \frac{1}{2}$ lässt sich f in $b_1 = 1$ (hinein) stetig fortsetzen zu

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \widetilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 1 \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

Fazit: Da f in $a_1 = 4$ und $a_2 = 9$ unstetig ist, ist sie global betrachtet eine *unstetige* Funktion.

Durch Verkleinern des Definitionsbereichs durch Entfernen der Stellen $a_1 = 4$ und $a_2 = 9$ können sowohl f als auch $\widetilde{f}$ zu *stetigen* Funktionen $f^* : \mathbb{R} \setminus \{1, 4, 9\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f^*(x) := f(x)$ bzw. $\widetilde{f}^* : \mathbb{R} \setminus \{4, 9\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \widetilde{f}^*(x) := \widetilde{f}(x)$ gemacht werden. ■

Tipps und Tricks

- Einseitige Grenzwerte lassen sich in gewissen Situationen vereinfacht berechnen.

Beispiel: Besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} x + 2, & \text{falls } x < 1 \\ \mathrm{e}^x + \frac{1}{3}, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ in $x_0 = 1$ einen Grenzwert?

Linksseitig: $f(x) = x + 2 \xrightarrow{x \nearrow 1} 1 + 2 = 3 = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$.

Rechtsseitig: $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{3} \xrightarrow{x \searrow 1} \mathrm{e}^1 + \frac{1}{3} = f(1)$, da f in $x_0 = 1$ durch den Term $\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}$ gegeben ist. Der rechtsseitige Grenzwert berechnet sich in $x_0 = 1$ gerade als Funktionswert, d. h. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Da wegen $3 \neq 3.03 = 2.7 + 0.33 < \mathrm{e}^1 + \frac{1}{3}$ die beiden einseitigen Grenzwerte verschieden sind, besitzt f in $x_0 = 1$ *keinen* Grenzwert (und ist dort folglich auch *unstetig*).

- Bei *Stetigkeitsuntersuchungen* prüfe nur solche Abschnittsgrenzen a_j ($j \in \mathbb{N}$), die zum Definitionsbereich der Funktion gehören.
- Bei Untersuchungen auf *stetige Fortsetzbarkeit* prüfe nur solche Abschnittsgrenzen b_j ($j \in \mathbb{N}$), die *nicht* zum Definitionsbereich der Funktion gehören.

Typische Fehlerquellen

Bei einseitigen Grenzwertberechnungen wird ein falscher Funktionsterm verwendet.

Beispiel: Berechne für

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x) := \begin{cases} x+2, & \text{falls } x<1 \\ e^x + \frac{1}{3}, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

den linksseitigen Grenzwert in $x_0 = 1$.

Typische Fehlerquelle ist unbedarftes Rechnen.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \overset{\lightning}{=} \lim_{x\to 1-} e^x + \frac{1}{3} = e^1 + \frac{1}{3}.$$

Hier wurde fälschlicherweise der rechtsseitige Term zur linksseitigen Grenzwertberechnung benutzt. ■

Wichtige Hinweise

Für gewisse Funktionenklassen ist eine …

Stetigkeitsprüfung nicht notwendig

Funktionen aus den folgenden Klassen sind stetig auf ihrem jeweiligen Definitions- bzw. Konvergenzbereich:

- elementare Funktionen,
- differenzierbare Funktionen,
- Funktionen, die eine Potenzreihendarstellung besitzen.

Im Zusammenhang mit der Eigenschaft der Stetigkeit gibt es einige zentrale Sätze, aus denen sich wichtige Erkenntnisse ziehen lassen.

Nullstellensatz (von Bolzano)

Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Zusätzlich gelte $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$).
Dann gibt es mindestens eine Stelle $x \in (a;b)$ mit der Eigenschaft $f(x) = 0$.

Kurz: f besitzt in $(a;b)$ mindestens eine Nullstelle.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $[0;2\pi]$. Da es sich um eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall handelt, kann der Nullstellensatz angewandt werden. Findet man also zwei Funktionswerte mit $f(a)$ und $f(b)$ mit unterschiedlichen Vorzeichen, so befindet sich zwischen a und b mindestens eine Nullstelle.
Wählt man etwa $a = 0$, $b = \pi$ und $c = 2\pi$, so erhält man $f(a) = 1$, $f(b) = -1$ und $f(c) = 1$. Nach dem Nullstellensatz gibt es zwischen 0 und π sowie zwischen π und 2π jeweils mindestens eine Nullstelle, nämlich $x_{01} = \pi/2$ bzw. $x_{02} = 3\pi/2$. ■

Als Folgerung hieraus erhält man den fundamentalen …

Zwischenwertsatz (von Bolzano)

Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion.
Dann gibt es zu jeder rellen Zahl y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens eine Stelle $x \in [a;b]$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$.

Kurz: Jede Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird in $[a;b]$ mindestens einmal angenommen.

Für viele Anwendung bedeutungsvoll ist auch der …

Satz von der Existenz des Minimums und Maximums

Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, reellwertige Funktion.
Dann gibt es jeweils mindestens eine Stelle $x_1 \in [a; b]$ sowie eine Stelle $x_2 \in [a; b]$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, x \in [a; b] : \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \;.$$

Kurz: f besitzt auf $[a, b]$ sogar ein Minimum und ein Maximum.

Folgerung (verallgemeinerter Zwischenwertsatz)
Jede Zahl y zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ wird in $[a; b]$ mindestens einmal als Funktionswert angenommen, d. h. es gibt ein $x \in [a; b]$ mit $f(x) = y$.

Wissensanker

Neben der eingeführten „gewöhnlichen" Stetigkeit gibt es weitere Stetigkeitsbegriffe mit „stärkerem" Charakter. Es werden zunächst die Definitionen einiger dieser Begriffe in Quantorenformulierung aufgelistet, um sie anschließend bezüglich ihrer Begriffsstärke einzuordnen.

Nachfolgend sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge.

Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig auf* D genau dann, wenn f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Definition (Stetigkeit an einer Stelle)
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \;\; \forall\, x \in D \text{ mit } |x - y| < \delta : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig auf* D genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \;\; \forall\, x \in D \text{ mit } |x - y| < \delta : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

Lipschitz-Stetigkeit

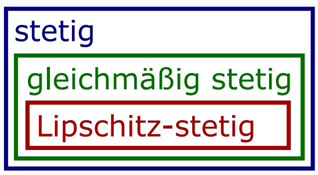
Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig auf* D genau dann, wenn

$$\exists\, L > 0 \;\; \forall\, x, y \in D : \quad |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y| \,.$$

Einordnung der Begriffsstärke

Es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist Lipschitz-stetig auf } D \\ \Longrightarrow \quad & f \text{ ist gleichmäßig stetig auf } D \\ \Longrightarrow \quad & f \text{ ist stetig auf } D \,. \end{aligned}$$



Bemerkung: Die verschiedenen Stetigkeitsbegriffe kommen insbesondere in der Funktionalanalysis und der Topologie zum Tragen.