Zahlenfolgen

In Natur, Technik, Ökonomie, etc. lassen sich vielfältige Prozesse mittels Zahlenfolgen beschreiben. So kann man etwa den Kontostand zum Monatsanfang oder die tägliche Maximaltemperatur an einem festen Ort als Folge interpretieren.

Die Analyse der Konvergenz von Folgen ist einer der Grundpfeiler der Analysis, denn auf ihr beruhen die Berechnung von Grenzwerten von Reihen und Funktionen, die Definition der Ableitung und des Integrals und vieles mehr.

Wichtig: Die Beschreibung des „Unendlichen" wird auf der Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ aufgebaut.

Grundlegende Zusammenhänge

1 Konstruktionsmöglichkeiten von Reihungen

Explizit definierte Zahlenfolge

Eine unendliche ***Zahlenfolge*** ist gegeben durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

Die Auslassungspunkte deuten eine unendliche Fortsetzung der Aneinanderreihung an.
Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist genau eine Zahl a_n zugeordnet, d. h.

die Folge kann auch tabellarisch notiert werden:

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$

Auch eine Abbildungsformulierung ist möglich:

$$a : \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto a_n \quad \text{mit } X \subseteq \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}\,.$$

- Eine Folge ist somit nichts anderes als eine Funktion, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist. Der Funktionsterm bzw. das so genannte ***allgemeine Folgenglied*** wird mit a_n statt $a(n)$ bezeichnet. Die Variable n wird im Folgen-Kontext als ***Index*** bezeichnet.
- In der Praxis benötigt man gelegentlich erweiterte oder eingeschränkte Definitionsbereiche. Diese erhält man durch Vorgabe eines Index' $N \in \mathbb{Z}$ und die Wahl eines Definitionsbereichs $D := \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq N\}$.

  Die Folge beschreibt man dann durch

  $$(a_n)_{n\geq N} := a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, a_{N+4}, \ldots \qquad \text{oder} \qquad a : D \to X,\ n \mapsto a_n\,.$$

- Geht der Definitionsbereich der Folge implizit aus dem Kontext hervor, so notiert man die Folge häufig in vereinfachter Form als (a_n).

Beispiel: Einige elementare, aber wichtige Zahlenfolgen sind:

- Die „Vorzeichenwechselfolge": $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
- Die Folge der geraden natürlichen Zahlen: $(2n)_{n\in\mathbb{N}} = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
- Die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen: $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Zu beachten sind die jeweiligen Indexmengen! ■

Rekursiv definierte Zahlenfolge

Eine Folge kann auch ***rekursiv*** definiert werden. Dabei berechnet sich das Folgenglied a_n aus einem oder mehreren vorherigen Glied(ern) $a_{n-1}, \ldots$ mit Hilfe einer sogenannten ***Rekursionsvorschrift***. Um eine Folge rekursiv eindeutig festzulegen, müssen zusätzlich ein oder mehrere ***Anfangswert(e)*** angegeben werden.

Beispiel: Durch die *Anfangswerte* $a_1 := 1, a_2 := \frac{1}{3}$ und die *Rekursionsvorschrift* $a_n := a_{n-2} - a_{n-1}$ für alle $n \geq 3$ ist eine Folge in rekursiver Weise gegeben. Die ersten Folgenglieder berechnen sich zu

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_n	1	$\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$	$-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$	$\cdots$

2 Eigenschaften von Folgen

alternierendes Verhalten

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge, deren Glieder abwechselnd positives bzw. negatives Vorzeichen haben, so nennt man (a_n) ***alternierend***.

Charakterisierung:

$$\begin{aligned} & \text{Die Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist alternierend} \\ \iff \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_n \cdot a_{n+1} < 0\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Die durch $b_n := \cos(n\cdot\pi)$ gegebene Folge ist alternierend, denn

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \cos(\pi), \cos(2\pi), \cos(3\pi), \cos(4\pi), \ldots = -1, 1, -1, 1, \ldots = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Auch durch formale Rechnung kann dies bestätigt werden:

$$b_n \cdot b_{n+1} = \cos(n\cdot\pi)\cdot\cos\big((n+1)\cdot\pi\big) = (-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1\cdot\big((-1)^2\big)^n = -1\cdot 1 = -1 < 0\,,$$

d. h. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterniert. ■

Konvergenz

Streben die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit wachsendem n gegen einen ***Grenzwert*** g, so schreibt man

$$\begin{aligned} & a_n \to g \quad \text{für } n \to \infty \\ \text{oder} \quad & a_n \xrightarrow{n\to\infty} g \\ \text{oder} \quad & \lim_{n\to\infty} a_n = g\,. \end{aligned}$$

Man sagt: (a_n) ***konvergiert*** für $n \to \infty$ gegen g.

Das Symbol lim steht für den ***Limes***, d. h. den Grenzwert des nachfolgenden Ausdrucks (oben: a_n).

Charakterisierung der Konvergenzeigenschaft:

Die Folge (a_n) besitzt den Grenzwert g genau dann, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass gilt

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Quantorenformulierung:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} a_n = g \\ :\iff \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon\ |a_n - g| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Untersuche die durch $a_n := \dfrac{n+1}{n+2}$ gegebene Folge auf Konvergenz.

Divergenz

- Eine Folge, die *nicht* konvergiert, wird als ***divergente*** Folge bezeichnet.
- Streben die Glieder a_n einer Folge für $n \to \infty$ gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, so ist (a_n) ***bestimmt divergent***.

Beschränkheit

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge und L, U Konstanten.

- Wenn alle Glieder $a_n \geq L$ sind, so heißt die Folge ***nach unten beschränkt***.
- Sind alle Glieder $a_n \leq U$, so nennt man die Folge ***nach oben beschränkt***.
- Liegen alle Glieder a_n in einem Intervall $[L, U]$, so ist die Folge ***beschränkt***.

Charakterisierungen der Beschränktheitseigenschaft mittels Quantoren:

$$\begin{aligned} & \text{Die Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \\ :\iff \quad & \exists L, U \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ L \leq a_n \leq U \\ \iff \quad & \exists C \in \mathbb{R}_0^+\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |a_n| \leq C\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $C = \max\{|L|, |U|\}$.

Beispiel: Untersuche die durch $a_n := \frac{n+1}{n+2}$ gegebene Folge auf Beschränktheit.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad 0 < \frac{n+1}{n+2} = a_n = \frac{(n+2)-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1\,,$$

d. h. (a_n) ist durch 0 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt. ■

Monotonie

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge.
Werden die Folgenglieder a_n immer größer, so „wächst" die Folge.

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ heißt } \textbf{\textit{monoton steigend}} \\ :\Longleftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} \geq a_n \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} - a_n \geq 0 \\ \overset{(a_n>0)}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{bzw.} \\ \overset{(a_n<0)}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\,. \end{aligned}$$

Werden die Folgenglieder a_n immer kleiner, so „schrumpft" die Folge.
Man definiert:

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ heißt } \textbf{\textit{monoton fallend}} \\ :\Longleftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} \leq a_n \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} - a_n \leq 0 \\ \overset{(a_n>0)}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \text{bzw.} \\ \overset{(a_n<0)}{\Longleftrightarrow} \quad & \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Je nach Struktur der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ führen diese gleichwertigen Formulierungen (über Differenzen bzw. Quotienten) unterschiedlich schnell zum Ziel.

Beispiel: Untersuche die durch $a_n := \frac{n+1}{n+2}$ gegebene Folge auf Monotonie, wähle dabei die Quotientenform.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{(n+2)\cdot(n+2)}{(n+3)\cdot(n+1)} = \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} = \frac{(n^2+4n+3)+1}{n^2+4n+3} = 1 + \frac{1}{n^2+4n+3} > 1\,,$$

d. h. (a_n) ist (streng) monoton steigend. ■

Methoden und Beispiele

1 Grenzwerte über Rechenregeln berechnen

Für konvergente Zahlenfolgen gelten folgende Regeln:

Rechenregeln

Sind (a_n) und (b_n) *konvergente* Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gelten:

- ***Summen-/Differenzenregel***:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

Insbesondere gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (c \pm a_n) = c \pm a\,.$

- ***Produktregel***:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Insbesondere gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a\,.$

- ***Inversen- und Quotientenregel***:
Ist $b \neq 0$, dann gibt es einen Index N mit der Eigenschaft, dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

- ***Betragsregel***:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|\,.$$

Beispiel: Untersuche die durch $a_n := \frac{2\cdot n-3}{n+2}$ gegebene Folge auf Konvergenz.

$$a_n = \frac{4\cdot n-3}{n+2} = 4\cdot\frac{n-\frac{3}{4}}{n+2} = 4\cdot\frac{(n+2)-\frac{11}{4}}{n+2} = 4\cdot\left(1-\frac{11}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0}\right) \;\to\; 4\cdot\left(1-\frac{11}{4}\cdot 0\right) = 4 \quad \text{für } n\to\infty\,,$$

d. h. (a_n) besitzt den Grenzwert 4. Symbolisch geschrieben: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4.$ ■

2 Grenzwerte über Einschnürung berechnen

Bei einer Vielzahl von Folgen (c_n) greifen die Rechenregeln zur Grenzwertberechnung allein nicht. Hier kommt man häufig mit Hife der „Folterkellermethode“ des *Einschnürens und Zuziehens* weiter. Dazu schließt man (c_n) zwischen zwei weiteren Folgen mit identischen Grenzwerten ein …

Einschließungskriterium

Sind (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen mit der Eigenschaft $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$ und sind darüber hinaus (a_n) und (b_n) konvergent mit demselben Grenzwert g, dann ist auch (c_n) konvergent mit Grenzwert g.

Beispiel: Ermittlung des Grenzwertes der Folge $\left(\sqrt[n]{3+7n^2+6n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Hilfe des Einschließungskriteriums.

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} 1 = \sqrt[n]{1+0+0} \leq \boxed{\sqrt[n]{3+7n^2+6n^3}} \leq \sqrt[n]{3n^3+7n^3+6n^3} = \sqrt[n]{16\cdot n^3} = \underbrace{\sqrt[n]{16}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n^3}}_{\to 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 1 = 1\,.$$

Das Einschließungskriterium liefert somit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+7n^2+6n^3} = 1$. Die Grenzwerte für $\sqrt[n]{16}$ und $\sqrt[n]{n^3}$ wurden dabei als bekannt vorausgesetzt bzw. unten stehender Tabelle „Wichtige Folgenbausteine“ entnommen. ■

3 Konvergenz mit Hilfe von Monotonie und Beschränktheit nachweisen

Langlebige Yuccapalmen konvergieren — sie wachsen und wachsen und wachsen, bis sie irgendwann an die Zimmerdecke anstoßen oder sich überlegen, eine gewisse Höhe nicht zu überschreiten.

Monotoniekriterium

Ist (a_n) eine beschränkte und monotone Folge, so ist (a_n) konvergent.

Abgeschwächte Varianten:

- Ist (a_n) nach *oben* beschränkt und für alle $n \geq N$ monoton *steigend*, so ist (a_n) konvergent.
- Ist (a_n) nach *unten* beschränkt und für alle $n \geq N$ monoton *fallend*, so ist (a_n) konvergent.

Bemerkung: Das Monotoniekriterium macht keine Aussage über den Grenzwert!

Beispiel: Die durch $a_n := \frac{n+1}{n+2}$ gegebene Folge ist laut vorausgehender Beispiele beschränkt und monoton und folglich gemäß Monotoniekriterium konvergent.

Tipps und Tricks

1 Folgeneigenschaften untersuchen

Vorgehen zur Untersuchung von Folgeneigenschaften

- Kennenlernen der Folge:
  - — Berechne „die ersten“ Folgenglieder und ggf. einige mit „sehr großen“ Indizes.
  - — Stelle eine Vermutung bzgl. Beschränktheit, Monotonie sowie Konvergenzverhalten (und ggf. alternierendem Verhalten) auf.
- Verifiziere die vermuteten Eigenschaften mittels einer Rechnung oder eines Beweises.

Beispiel: Lerne die Folgen der vorhergegangenen Beispiele durch Berechnung der ersten Folgenglieder kennen!

2 Konvergenz nachweisen oder den Grenzwert ermitteln oder beides?

Zwei typische Fragestellungen sind die Bestimmung des Folgengrenzwertes und die Untersuchung des Konvergenzverhaltens. Dabei bietet sich folgendes Vorgehen an:

Methoden, um Grenzwerte zu bestimmen

- Über die Rechenregeln ausrechnen, falls diese angewendet werden dürfen.
- Einschließungskriterium anwenden.
- Konvergenzdefinition verwenden (nur dann, falls ausdrücklich gefordert).

Vorgehen bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens

- Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so ist sie konvergent. D. h. der Nachweis der Konvergenz kann oft über die Berechnung des Grenzwertes erfolgen.
- Falls dies nicht funktioniert, kann der Nachweis der Konvergenz ggf. über das Monotoniekriterium erbracht werden.

3 Gliederung von Folgentermen

Zur Grenzwertbestimmung kann ein Folgenterm häufig so umgeformt werden, dass er anschließend nur noch *elementare Bausteine* mit bekannten Grenzwerten enthält.

Wichtige Folgenbausteine

Folge		strebt für $n \to \infty$ gegen	Bemerkung
n^c	$\longrightarrow$	$\begin{cases} \infty, & \text{falls } c > 0 \\ 1, & \text{falls } c = 0 \\ 0, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$	der Exponent $c \in \mathbb{R}$ ist dabei eine feste Zahl. Spezialfälle: n, n^2, $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{n} = n^{-1}$, usw.
c^n	$\longrightarrow$	$\begin{cases} \infty, & \text{falls } c > 1 \\ 1, & \text{falls } c = 1 \\ 0, & \text{falls } \lvert c\rvert < 1 \\ \text{divergiert}, & \text{falls } c \leq -1 \end{cases}$	die Basis $c \in \mathbb{R}$ ist dabei eine feste Zahl. Spezialfälle: 2^n , $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(-1)^n$, $\mathrm{e}^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$, usw.
$\sqrt[n]{c}$	$\longrightarrow$	$\begin{cases} 1, & \text{falls } c > 0 \\ 0, & \text{falls } c = 0 \end{cases}$	der Radikand $c \geq 0$ ist dabei eine feste Zahl
$\sqrt[n]{n}$	$\longrightarrow$	1	
$\sqrt[n]{n^c}$	$\longrightarrow$	1	der Exponent $c \in \mathbb{R}$ ist dabei eine feste Zahl
$\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n$	$\longrightarrow$	e^c	gilt für jedes beliebige, aber feste $c \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$n!$	$\longrightarrow$	∞	
$\sqrt[n]{n!}$	$\longrightarrow$	∞	
$\ln(n)$	$\longrightarrow$	∞	
$\frac{\ln(n)}{n}$	$\longrightarrow$	0	die Logarithmusfolge wächst sehr viel langsamer als die lineare Folge

4 Abschätzen von Folgentermen

Häufig müssen Folgenterme gegen einen kleineren oder größeren Term abgeschätzt werden. Bruchterme, die selber Summen- oder Differenzterme enthalten, werden dabei so abgeschätzt, dass anschließend gekürzt werden kann und bekannte Folgenbausteine (siehe unten) übrig bleiben. Folgende Ideen können dabei helfen:

- Zahlen addieren bzw. subtrahieren, z. B.:

$$\frac{n+1}{n-2} > \frac{n}{n-2} \overset{(n\geq 3)}{>} \frac{n}{n} = 1 \quad \text{für alle } n \geq 3\,.$$

- Zahlen durch einen Variablenterm ersetzen, z. B.:

$$\frac{n+1}{n-2} \leq \frac{n+n}{n-2} \overset{(n\geq 5)}{<} \frac{n+n}{n-\frac{n}{2}} = \frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4 \quad \text{für alle } n \geq 5\,.$$

Wichtige Hinweise

1 Eindeutigkeit in der Folgennotation

Eine Folge ist durch Angabe einiger Anfangsglieder *niemals* eindeutig festgelegt! Die in manchen Intelligenztests gestellte Aufgabe, eine Folge anhand ihrer ersten gegebenen Glieder fortzusetzen, ist daher mathematisch wenig sinnvoll.

Beispiel: Eine plausible Fortsetzung von $3, 1, 4, 1, 5$ wäre etwa $1, 6, 1, 7, \ldots$ Erkennt man in $3, 1, 4, 1, 5$ jedoch die ersten Ziffern der Dezimaldarstellung der Kreiszahl π wieder, so wäre auch $9, 2, 6, 5, \ldots$ eine mögliche Fortsetzung, ebenso ist $7, 7, 7, 7, \ldots$ als Fortsetzung denkbar. Eine Fortsetzung der jeweiligen Fortsetzung ist ihrerseits nicht eindeutig.
Folgen sollten deshalb immer durch ein *Bildungsgesetz* (explizit, rekursiv oder gemischt) angegeben werden!

2 Teilfolgen

Durch Auswahl von Indizes lassen sich beliebige Teilfolgen von gegebenen Folgen bilden.

Teilfolge

Streicht man in einer gegebenen unendlichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig viele Glieder derart, dass unendlich viele Glieder übrig bleiben, so erhält man eine ***Teilfolge*** $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, worin $n_k \geq n$ gilt.

Bemerkung: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch *jede* Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Für *Divergenznachweise* ist die Kontraposition interessant:
Besitzt eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel: Betrachte typische Prozesse zur Teilfolgenbildung. Gegeben sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

- Teilfolge ohne die zwei ersten Folgenglieder: $n_k := k+2$: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{k+2})_{k\in\mathbb{N}} = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$
- Teilfolge aller geraden Folgenglieder: $n_k := 2k$: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
- Teilfolge, die nur aus Primzahlen besteht: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Die Indexauswahl erfolgte dabei durch *Verschiebung*, *formelbasierte Auswahl* bzw. *beschreibende Auswahl.* ■

3 Häufungswerte

Eine *Abschwächung des Grenzwertbegriffs* ist der Begriff des Häufungswerts und das damit verbundene mathematische Konzept.

Häufungswert

Eine Zahl a heißt ***Häufungswert*** einer Folge (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Zentral in diesem Zusammenhang ist der

Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede *beschränkte* Folge (a_n) besitzt mindestens einen ***Häufungswert*** a.

Jeder Häufungswert a lässt sich als Grenzwert einer geeignet gewählten Teilfolge (a_{n_k}) berechnen.

Beispiel: Um die Häufungswerte der durch $a_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{2n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ definierten Folge zu ermitteln, greift man aus der Tabelle „Wichtige Folgenbausteine" folgende Bausteine heraus:

$$\left(\sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right) \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 1 = 1\,.$$

Die gesuchten Häufungswerte von (a_n) erhält man als Grenzwerte der, aus den gerad- bzw. ungeradzahligen Indizes gebildeten Teilfolgen

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\cdot\sqrt[2k]{4k} + \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} = \sqrt[2k]{4k} + \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 + 0 = 1 \quad \text{bzw.}$$

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}\cdot\sqrt[2k+1]{4k+2} + \frac{1}{\sqrt[2k+1]{(2k+1)!}} = -\sqrt[2k+1]{4k+2} + \frac{1}{\sqrt[2k+1]{(2k+1)!}} \xrightarrow{k\to\infty} -1 + 0 = -1\,.$$

Man kann zeigen, dass es keine weiteren Häufungswerte gibt. Die Menge aller Häufungswerte von (a_n) ist somit $\mathcal{H} = \{-1, 1\}$. ■

Kleinster und größter Häufungswert

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt einen kleinsten und einen größten Häufungswert, den sogenannten ***Limes inferior*** bzw. ***Limes superior***.
Symbole: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Für jede konvergente Teilfolge $(\tilde{a}_n)$ von (a_n) gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n\,.$$

Hinweis: Die Häufungswerte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ werden in den folgenden Wegweisern benötigt.

Wissensanker

1 Ein spezieller Folgentyp

Ein wichtiger Folgentyp entsteht durch „teilweises" Aufsummieren der Glieder einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\,.$$

Die dabei entstehende neue Folge der so genannten Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man ***Zahlenreihe*** (siehe Wegweiser „Zahlenreihen"). Diese kann höchstens dann konvergieren, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

2 Weitere Konvergenzkriterien

Funktionskriterium

Gibt es eine Funktion f mit $f(n) = a_n$ für alle $n \ge N$ und gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

- Häufig kann der Grenzwert von f für $x \to \infty$ mit der Regel von l'Hospital ermittelt werden.
- Das Funktionskriterium funktioniert ebenfalls bei *Beschränktheits-* und *Monotonieuntersuchungen*.

Reihenkriterium

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} a_n = g \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d. h. konvergiert die Zahlenreihe $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ im eigentlichen Sinn, so ist die Folge (a_n) der Reihenglieder notwendigerweise eine Nullfolge.

Das Kleingedruckte

- Wichtige Konvergenzkriterien für Folgen sind:
  - *Monotoniekriterium*: Eine monotone Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.
  - *Cauchy-Kriterium*: Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
  - *Sandwichkriterium*: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert, wenn sie nach unten und nach oben durch konvergente Folgen abgeschätzt werden kann, die denselben Grenzwert haben.
- Gleichwertige Konvergenzprinzipien sind: Intervallschachtelung, Monotoniekriterium, Cauchy-Kriterium, Satz von Bolzano-Weierstraß.
- Bei der Konvergenzanalyse einer rekursiv definierten Folge wird oft das oben genannte Monotoniekrierium benutzt, bei dessen Anwendung das Beweisprinzip der vollständigen Induktion ein nützliches Hilfsmittel ist.