Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
3.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$;

(ii) $11^n - 6$ ist durch 5 telibar;

(iii) $\forall n \geq 4 : n! > 2^n$.

Aufgabe 2: Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

(a) berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k};$$

(b) zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 3:

(a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 3i$ und $z_2 = -2 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von:

(i) $\frac{1}{z_1} \cdot z_2$;

(ii) $\bar{z}_1^2 + \frac{1}{z_2^2}$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) > 1\}$;

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) \leq 1\}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ zu folgenden Gleichungen:

(i) $z^3 + 8 = 0$;

(ii) $z^3 - (3 - i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0$.

Hinweis: Die Gleichung in der Teilaufgabe (c)(ii) besitzt eine Lösung z mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

(a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$;

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Die Aufgaben werden in den Tutorien in der Woche vom 9. bis 13.11.2015 besprochen.