Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
10.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Finden Sie Beispiele für reelle Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und 13 als Häufungspunkte.

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt, jedoch konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2015, aber nicht monoton.

Aufgabe 2: Es sei $0 < a < 1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{1}{2}a\,, \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3}$;

(b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

(c) $a_n = \frac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}}$;

(d) $a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\right)$;

(e) $a_n = \frac{7n^7\left(1+\frac{1}{n!}\right)(n^3-n^2)}{(n^3+2)\left(n^5+\sqrt{n+1}\right)n^2}$;

(f) $a_n = \sqrt[3n]{n+1}$;

(g) $a_n = \sqrt[n]{n^p}$ $\quad$ ($p \in \mathbb{N}$ fest).

Hinweis: In (d) können Sie ohne Beweis verwenden: Sei $p \in \mathbb{N}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $b_n \to b$, so ist auch $\sqrt[p]{b_n} \to \sqrt[p]{b}$ für $n \to \infty$.

Die Aufgaben werden in den Tutorien in der Woche vom 16. bis 20.11.2015 besprochen.