Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
24.11.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = \cos(\sin(x))\, e^{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = \sin(\sin(x))\, e^{\cos(x)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Real- und Imaginärteil von $e^{(e^{ix})}$.

Aufgabe 3: Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$

Hinweis: In Teil (d) hilft die Abschätzung $2n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! \leq n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}$ weiter.

Aufgabe 4: Seien $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. Bezeichne $(0.a_1a_2a_3\ldots)_g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{g^n}$. Zeigen Sie, dass

(i) $(0.671875)_{10} = (0.101011)_2$ und (ii) $(0.173)_8 = (0.03312)_4$.

Die Aufgaben werden in den Tutorien in der Woche vom 30.11. bis 04.12.2015 besprochen.