Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
8.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Die Funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$.

(a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

(b) Wenden Sie (a) auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

(c) Nun sei $y_0 \in [0,2]$ fest vorgegeben. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ werde rekursiv definiert durch $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 2: Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a}$ $(a \in \mathbb{R})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie: $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.
Hinweis: Setzen Sie zunächst $y := \ln(1+t)$ und berechnen Sie $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}$.

(b) Folgern Sie hieraus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} + i$ und $w = 4 + 4\sqrt{3}i$ die Darstellung in Polarkoordinaten von:

(a) $\dfrac{1}{z}$ (b) $\left(\dfrac{1}{z}\right)^{13}$ (c) $\sqrt[3]{w}$ (d) $\dfrac{w^7}{z^{13}}$

Die Aufgaben werden in den Tutorien in der Woche vom 14. bis 18.12.2015 besprochen.