Satz 0.1. *Jede reelle Folge (a_n) hat eine monotone Teilfolge.*

Der Beweis dieses Satzes ist nicht prüfungsrelevant. Unten finden Sie einen kurzen und schönen Beweis.

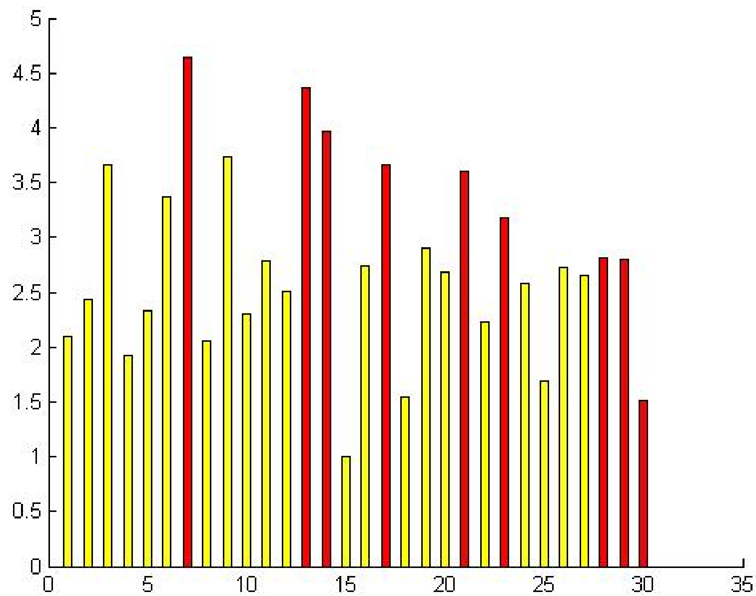

Figure 1:
Folgenbeispiel mit Spitzen

Beweis. Ein Folgenglied a_{n_0} heißt "Spitze" wenn $a_n \leq a_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. In der Abbildung 1 sind solche Terme rot markiert.

Fall 1: Es gibt unendlich viele "Spitzen" $a_{k(1)}, ..., a_{k(n)}, ...$ mit

$$k(1) \leq k(2) \leq .... \leq k(n) \leq ...$$

Dann ist $(a_{k(n)})$ eine monoton fallende Teilfolge von (a_n).
Fall 2: Es gibt nur endlich viele oder keine "Spitzen". Dann gibt es $k(1)$ so dass für alle $k \geq k(1)$ gilt: a_k ist keine "Spitze". Da $a_{k(1)}$ keine Spitze ist, gibt es $k(2) > k(1)$ so dass $a_{k(1)} < a_{k(2)}$. Da $a_{k(2)}$ keine Spitze ist, gibt es $k(3) > k(2)$ so dass $a_{k(2)} < a_{k(3)}$. Wenn man den Prozess wiederholt, kann man induktiv eine Teilfolge konstruieren, die monoton wachsend ist. $\square$