1.1 Aussagen

[Eine Aussage ist ein Satz der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.]

Beispiel (Bsp): (i) 2 ist größer als 3 (f)

(ii) $4 = 2^2$ (w).

Die Aussagen sind wichtig wenn man programmiert (Befehl "if" in Programmieren)

[1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wahrheitstafel

$A \wedge B$ (logisches "und" (and))

(A und B)

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

$A \vee B$ (logisches "oder" (or))

(A oder B)]

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	f	f

Bsp 1.2 $(2^3=8) \vee (4^2=16)$ ist wahr

(es ist zugelassen, dass beide Aussagen richtig sind).

Negation

$\neg A$ (nicht A)

A	w	f
$\neg A$	f	w

Bsp 1.3 A: $3 > \sqrt{8}$

B: 4 ist gerade

C: $0 \geq 0$.

$$[\neg(A \wedge B)] \vee \underbrace{(\overset{\text{wahr}}{A} \wedge \overset{\text{wahr}}{C})}_{\text{wahr}}$$

Also ist die gesammte Aussage wahr.

Also ist die Aussage wahr.

Implikation $A \Rightarrow B$

wenn A, dann B

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

A: Es regnet B: die straße ist nass

$A \Rightarrow B$ wenn es regnet, ist die Straße nass.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

"A genau dann, wenn B"

"A dann und nur dann, wenn B"

Bsp 1.4: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B]$

weil

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$\neg A$	f	f	w	w
$(\neg A) \vee B$	w	f	w	w

Also stimmen die Wahrheitstafeln von $(A \Rightarrow B)$ und $(\neg A) \vee B$ überein.

1.3 Regeln

Mit Argumentation ähnlich wie im Bsp 1.4 kann man verschiedene Regeln zeigen. Manche von denen sind

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$$

Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen. Manchmal wenn wir zeigen wollen, dass $A \Leftrightarrow B$, zeigen wir erst, dass $A \Rightarrow B$ und dann, dass $(B \Rightarrow A)$.

$$[\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$$

$A \vee B$ ist falsch

A ist falsch und B ist falsch.

genau dann wenn

ähnlich $[\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$. Kontraposition.

Oft in der Praxis: Wir wissen, dass A wahr ist und wir wollen B zeigen. ~~Wir~~ Manchmal dann nehmen wir an dass B falsch ist und zeigen dass A falsch ist (Beweis mit Widerspruch).

[1.4 Quantoren

Eine **Aussageform** $A(x)$, $A(x,y)$, $A(x,y,z)$ ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen $x, y, z, \ldots$ enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.]

Bsp 1.5 $A(x,y)$: $\quad x+y>2$.

$A(-1, 2.5)$: $\quad -1+2.5>2$ (f)

$A(1, \sqrt{3})$: $\quad 1+\sqrt{3}>2$ (w)

[Der **Allquantor** $\forall x: A(x)$ bedeutet. für alle Objekte x ist $A(x)$ wahr.

Der **Existenzquantor** $\exists x: A(x)$ bedeutet es gibt mindestens ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist

Negation: $\neg(\forall x: A(x)) \Leftrightarrow (\exists x: \neg A(x))$ (*)

und $\neg(\exists x: A(x)) \Leftrightarrow (\forall x: \neg A(x))$].

Bsp 1.6 Mit x bezeichen wir alle Leute, die jetzt im Benz Hörsaal sind. Sei $A(x)$: Die Person x studiert Elektrotechnik.

$\forall x : A(x)$ bedeutet jede Person, die jetzt im Benz Hörsaal ist, studiert Elektrotechnik.

$\exists x : \neg A(x)$ bedeutet: es gibt mindestens eine Person, die jetzt im Benz ist und nicht Elektrotechnik studiert.

(*) sagt dass die Negation der ersten Aussage Äquivalent zu der zweiten ist.

In den allgemeisten Fällen werden Quantoren eingeschränkt und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte.

<u>Bsp 1.7</u> $A(x): x > 0.$

$B(x)$: x ist eine gerade Zahl.

$\forall x$ mit $A(x): B(x)$ bedeutet

jede Zahl größer als 0 ist eine gerade Zahl (f)

$\exists x$ mit $A(x): B(x)$ bedeutet

Es gibt (mindestens) eine Zahl größer als Null, die eine gerade Zahl ist. (w)