Wir betrachten die Menge $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Die <u>Permutationen</u> von A_n sind alle möglichen Reihenfolgen mit denen wir die Zahlen 1 bis n schreiben können.

<u>Bsp 4.11</u> Die Menge $A_3 = \{1, 2, 3\}$ hat 6 Permutationen nämlich 123, 132, 213, 231, 312, 321.

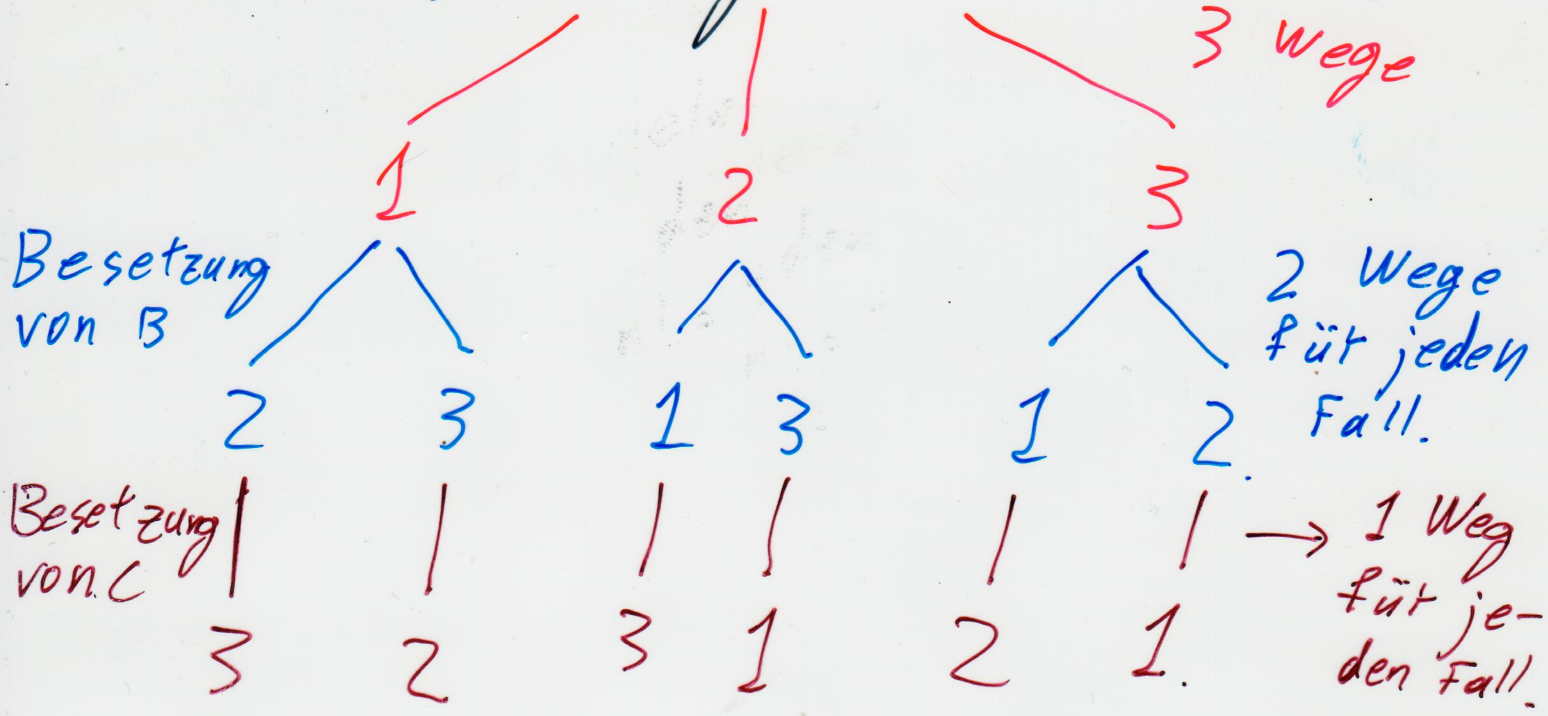
<u>Frage:</u> Wie viele Permutationen hat A_n.
<u>Äquivalente Formulierung:</u> n Personen, n feste Stühle. In wie vielen Wegen können die n Personen in den Stühlen sich setzen: Antwort: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

<u>Beweisidee:</u> Wir nehmen an, dass erst der erste Stuhl besetzt wird, dann der zweite usw. Der erste Stuhl kann in n Wegen besetzt werden. Danach der zweite in $n-1$ Wegen, weil es $n-1$ übrige Personen gibt. Der dritte in $n-2$, ..., der k-te in $n-k+1$ Wegen. Insgesamt $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Illustration für $n = 3$. Stühle

A, B, C Personen 1, 2, 3

Besetzung von A



Insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Wege.

Erklärung der übungsaufgabe.

(2) Jede von den 100 Personen wird mit 99 Personen anstoßen. dass gibt $100 \cdot 99 = 9900$ aber mit jedem Astosen $2!$ Mal gezählt. deshalb $\frac{9900}{2!} = 4950$.

↑

Erklärung der Übungsfrage.

Die folgenden Fragen sind äquivalent. Wählen Sie die richtige Antwort.

In einem Raum sind 100 Studierenden.

(1) Der Dozent wählt für ein Experiment 2 Studierenden. Wie viele Wege hat der Dozent eine Gruppe von zwei Studierenden zu wählen?

(2) Die 100 Studierenden gehen am Abend in die Kneipe. Jede Person bestellt ein Glas wein. Alle Studierenden stoßen 1 Mal mit einander an. Wie viele Anstoßen gibt es?.

(i) 50
(ii) 9900
(iii) 4950
(iv) keine der obigen Antworten.
(v) keine Ahnung.

Übungsfrage.

4.8 Binomialkoeffizienten:

Sei $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, wie viele Teilmengen mit k Elementen hat A_n? Antwort: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

n über k.

Beweisidee: Wir wählen k Elemente von A_n. Es gibt n Wege ein erstes Element zu wählen, $n-1$ ein zweites Element zu wählen, $\ldots$, $n-k+1$ Wege ein k-tes Element zu wählen. Also insgesamt $\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Aber mit diesem Vorgehen wird jede Teilmenge mi k Elementen $k!$ Mal gewählt, weil sie $k!$ Permutationen hat. Also es gibt $\binom{n}{k}$ solche Teilmengen.

Bsp 4.12 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ hat $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} = 10$ Teilmengen mit 2 Elementen $\{1\ 2\}$ $\{1\ 3\}$ $\{1\ 4\}$ $\{1\ 5\}$ $\{2\ 3\}$ $\{2\ 4\}$ $\{2\ 5\}$ $\{3, 4\}$ $\{3\ 5\}$ $\{4\ 5\}$

Binomialsatz: Seien $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dann $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Bsp 4.13 $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k}$

$= \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b + \binom{4}{4}$

$= \dots = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.$

Beweisidee: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \dots (a+b)}_{n \text{ Mal}, \ n \text{ Klammern}}$

der Term $a^k b^{n-k}$ taucht auf wenn wir von den n Klammern k das a wählen. Es gibt aber $\binom{n}{k}$ Wege das zu machen.

Illustration mit Bsp 4.13.

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$

$a^2 b^{4-2} = a^2 b^2$ taucht auf wenn wir 2 Mal das Element wählen. Es gibt aber $\binom{4}{2} = 6$ Wege das zu machen.

Bernoullische Ungleichung:

Sei $x \geq -1$. Dann $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: (IA): Für $n=1$ $\quad (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$

also stimmt die Aussage:

(IS): Induktionsannahme: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad (*)$

für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

z.z. $\quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

In der Tat $\quad (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$

$$\overset{(*)}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

und weil $1+x \geq 0$. $\quad$ was zu zeigen war.

Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aus der Bernoullische Ungleichung folgt.

$\boxed{(1)}$ Wenn $a \in (1,\infty)$ und $K>0$, dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$.

(2) Wenn $a \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$, dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis: (1) $a^n = (1+(a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$

wegen der Bernoulli-shen Ungleichung.

Aber nach Satz 4.2 können wir n wählen, so dass $n > \frac{K}{a-1}$. (**)

Da $a-1>0$ bekommen wir

$$a^n \geq 1 + n(a-1) \underset{a-1>0}{\overset{(**)}{\geq}} 1 + \frac{K}{a-1}(a-1) = 1+K > K.$$

(2) $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} \in (1,\infty)$. Da $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ können wir wegen $\boxed{(1)}$ können wir n wählen mit $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \xRightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{mit } a^n\varepsilon > 0} \varepsilon > a^n$$

was zu zeigen war.