4.10 Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Dann gibt es ein $b > 0$, so dass $b^n = a$. b heißt n-te Wurzel von a, man schreibt $b = \sqrt[n]{a}$.

Bsp 4.14 $\sqrt[6]{64} = 2$, weil $2 > 0$, und $2^6 = 64$.

(1) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann

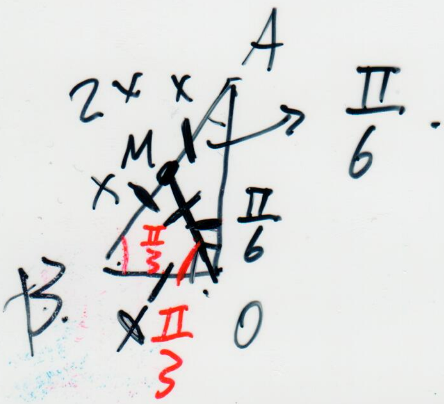
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}.$$

(2) Seien $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, dann

$$a \leq b \iff a^n \leq b^n \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$$

Beweis: Übung.

Bsp 4.15 $a^4 - b^4 = (a-b)(b^3 + ab^2 + a^2 b + a^3)$



Ergänzung: Wieso $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

$OB = x \Rightarrow AB = 2x$.

$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}\, x$.

Wir betrachten ein Rechtwinkliges Dreieck OAB wie in der Skizze.

Wir betrachten den Punkt M in AB mit $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6}$. Da $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$ folgt dass $\widehat{MOB} = \frac{\pi}{3}$. Also ist das Dreieck $\widehat{OMA}$ gleichschenklig und das Dreieck $\widehat{OMB}$ gleichseitig. Also ist $x = |OB|$ dann $x = |OB| = |OM| = |MB| = |MA|$.

Daraus folgt $|AB| = |AM| + |MB| = 2x$.

Also $|OA| = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}\, x$

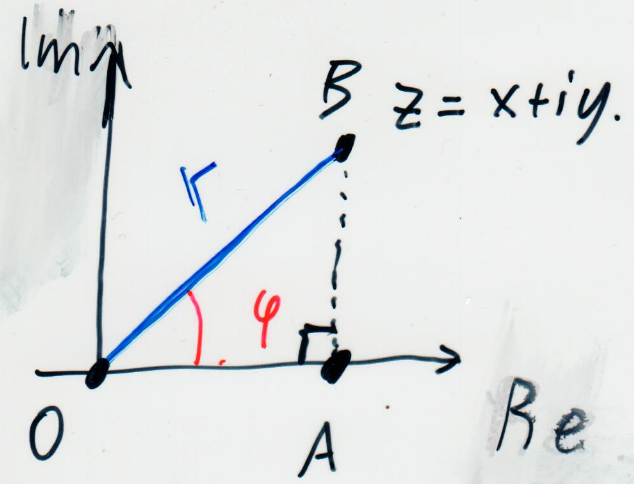
Aber dann $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|OB|}{|AB|} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}\, x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5 Mehr über die komplexen Zahlen

Polarkoordinaten und Eulersche Formel.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$.



Sei $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und φ Winkel zur positiven x-Achse. Dann.

$$x = OA = OB\cos\varphi = r\cos\varphi = |z|\cos\varphi$$

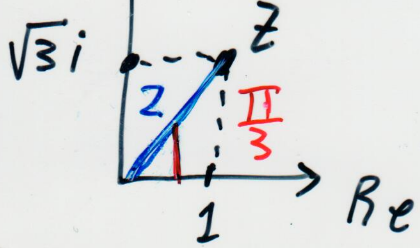
ähnlich $y = r\sin\varphi = |z|\sin\varphi$.

Eulersche Formel $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Wegen der Polardarstellung und der Eulerschen Formel kann man schreiben.

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Bsp 5.1



Sei $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Dann $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Also $z = 2\left(\underset{\cos\frac{\pi}{3}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}} + \underset{\sin\frac{\pi}{3}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\,i\right)$.

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

5.1 Polynome : Funktionen $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

mit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$.
mit $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $a_j \in \mathbb{C}$
$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. p heißt reell wenn
$a_j \in \mathbb{R}$ $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wenn $a_n \neq 0$
sagt man p ist vom Grad n ($n = \text{Grad}\, p$)

wenn $p = a_0$ → Grad $p = 0$, wenn $a_0 \neq 0$
→ Grad p nicht definiert wenn $a_0 = 0$.

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt Nullstelle von p, wenn $p(z_0) = 0$.

Bsp 5.2 $p(z) = i z^2 + z + (1-i)$
ist Polynom vom Grad 2

$p(-1) = i(-1)^2 - 1 + 1 - i = i - i = 0$
also ist -1 Nullstelle von p.

Polynomdivision 5.2: Seien p, q Polynome
mit Grad $q \leq$ Grad p. Dann gibt es
Polynome m, r mit $p = mq + r$ und
Grad $r <$ Grad q oder $r = 0$ (r: Rest).

Methode der Division: Wir multiplizieren q mit geeignetem az^m, $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $\text{Grad}(p - az^m q) < \text{Grad}(p)$. Wir ersetzen p mit $p - az^m q$ und wiederholen die Methode bis der Grad der linken Seite kleiner ist als Grad q

---

<u>Bsp 5.3</u> $p(z) = 4z^2 + 2iz + 1$, $q(z) = z + i$.

Wir subtrahieren $4zq(z)$ von $p(z)$ damit der Term $4z^2$ verschwindet.

$$p(z) - 4z\,q(z) = (4z^2 + 2iz + 1) - 4z^2 - 4iz$$
$$= -2iz + 1 \longrightarrow \text{Grad } 1 = \text{Grad } q.$$

$$(-2iz + 1) + 2i\,q(z) = (-2iz + 1) + 2i(z + i) = -1$$

$-1 \longrightarrow$ vom Grad $0 < \text{Grad } q$

Also $p(z) = (4z - 2i)\,q(z) - 1$

Ist $-i$ Nullstelle von p?

Nein weil $p(-i) = -1$ da $q(-i) = 0$.

<u>Allgemein:</u> Sei p Polynom und $z_1 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p (d.h. $p(z_1)=0$). Dann Division von p durch $z-z_1$ gibt

$$p(z) = m(z)(z-z_1) + r$$

$\to$ r konstant weil $r=0$ oder $\text{Grad}\, r < 1 \Rightarrow \text{Grad}\, r = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Also } p(z_1) = r \\ \text{da } p(z_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 0.$$

Also $\boxed{p(z) = m(z)(z-z_1)}$ $(*)$

5.3 Fundamentalsatz der Allgebra

> Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung 5.2 Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$.
Dann $\exists$ $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \quad (**)$$

Also hat p die Nullstellen $z_1, \dots, z_n$.

z.B $\quad x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$.

Beweisidee: $\mathrm{Grad}\, p = n \geq 1$, also hat p eine Nullstelle z_1 (wegen des Fundamentalsatzes der Algebra).

Aus $(*)$ foglt $p(z) = \underbrace{m(z)}_{\text{vom Grad } n-1} (z - z_1)$ (1),
wobei $m(z)$ Polynom vom Grad $n-1$.
Ist $n = 1$ dann $n - 1 = 0 \Rightarrow m(z)$ konstant
erledigt.

Ist $n > 1$ dann $\mathrm{Grad}\, m \geq 1$. Also hat m eine Nullstelle z_2. Ähnlich folgt, dass $m(z) = h(z)(z - z_2)$. Wir wiederholen das Verfahren bis es keine andere Nullstellen gibt und am Ende bekommen wir $(**)$.