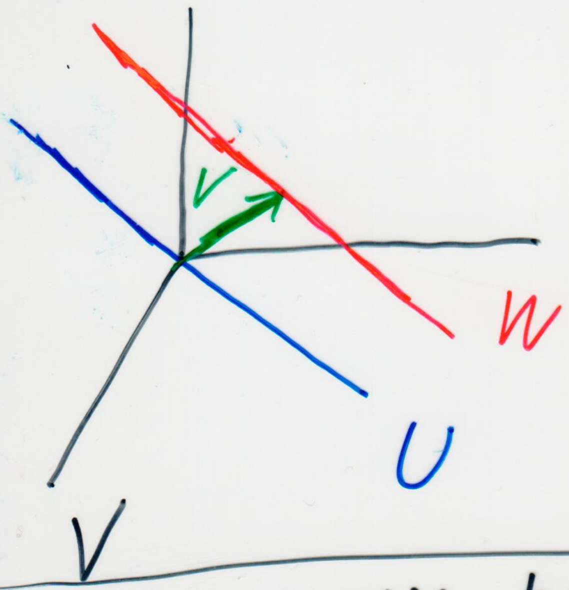
## 13.3 Affine Teilräume:

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. $W$ heißt **affiner Unterraum** (**affiner Teilraum**) wenn es einen Unterraum $U$ von $V$ gibt und ein $v \in V$ mit $W = U + v = \{v + u : u \in U\}$. (Verschiebung von $U$ nach $v$).




Also "sieht wie ein Unterraum aus" muss aber nicht durch 0 gehen.

---

**Bsp 13.7** Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 & (3). \end{cases}$$

$$(S')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1') \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2') \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3') \end{cases}$$

$b_j$: Spannungen → bekannt.

Typischer Fall: $a_{ij}$ Widerstände → bekannt.

$x_j$ Ströme (unbekannt).

(i) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \text{ Lösung von } (S)\}$ ist immer ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ist $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \text{ Lösung von } (S')\}$. Ist $W \neq \emptyset$ dann ist $W$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

---

Beweisidee: (i). Sind $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$

dann
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= 0 \end{aligned} \rightarrow (1).$$

$$a_{11}(x_1+y_1) + a_{12}(x_2+y_2) + a_{13}(x_3+y_3) = 0.$$

Also erfüllt $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ (1). ähnlich erfüllt sie (2), (3), also ist $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in U$. Ählich $\alpha(x_1, x_2, x_3) \in U$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Also ist $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(ii).

(ii). Ist $v=(v_1, v_2, v_3)$ eine Lösung von (S') ($v \in W$) dann $W = v + U$ (*)

alle Lösung von (S') — eine Lösung von (S') — alle Lösungen von (S)

Also ist $W$ ein affiner Unterraum.

Erklärung von (*) z.B $W \subset v + U$.

Ist $(x_1, x_2, x_3) \in U$ dann

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0. \\
a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = b_1 \\
\hline
a_{11}(x_1+v_1) + a_{12}(x_2+v_2) + a_{13}(x_3+v_3) = b_1.
\end{array}
$$

Also ist $(x_1+v_1, x_2+v_2, x_3+v_3)$ Lösung von (1') und ähnlich von (2'), (3') also ist

$((x_1, x_2, x_3) + (v_1, v_2, v_3)) \in W$.

Sei $K = \{(1,1), (1,-1)\}$ und. **Bsp 13.8**

$L = \{(1,0,-1,-1,0,0), (0,-1,1,0,1,0), (-1,1,0,0,0,1), (0,0,0,1,-1,-1)\}$. Sind die Vektoren in $K$ beziehungsweise $L$ linear unabhängig? Wählen Sie die richtige Antwort

(1) In $K$ ja und in $L$ ja

(2) In $K$ ja aber in $L$ nein. ✓

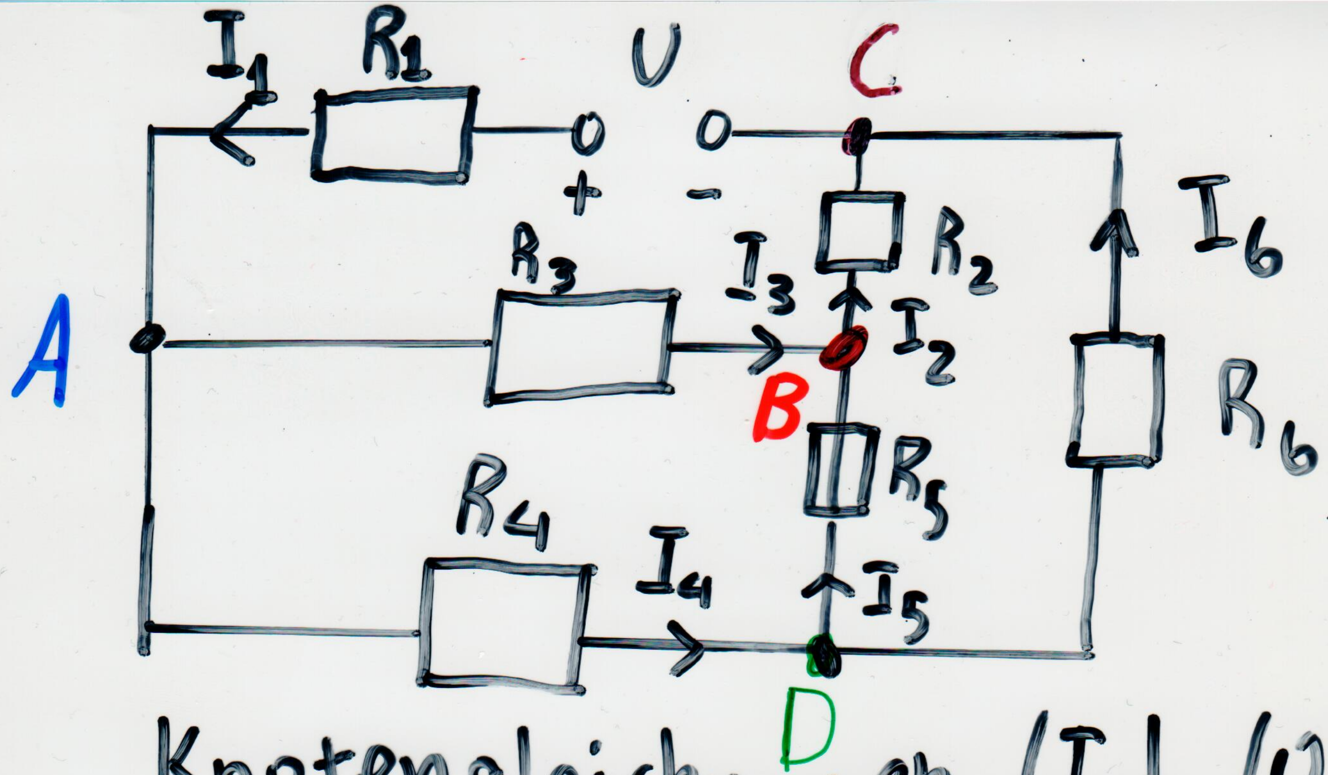
(3) In $K$ nein aber in $L$ ja

(4) In $K$ nein und in $L$ nein

(5) keine Ahnung.

---

Was bedeutet die Antwort für $L$ für das lineare elektrische Netz der anderen Seite.




Knotengleichungen

$$\begin{array}{c} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \\ D \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0, -1, -1, 0, 0) + (0, -1, 1, 0, 1, 0)$$
$$+ (-1, -1, 0, 0, 0, 1) + (0, 0, 0, 1, -1, -1)$$
$$= (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

$\Rightarrow$ Die 4 Vektoren sind linear abhängig.

## 13.4 Lineare Unabhängigkeit

**Def 13.5** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. $n$ Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in K$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Ansonsten heißen Sie linear abhängig.

---

**Bsp 13.7** $(1,0)$, $(0,1)$ sind linear unabhängig, weil $\alpha_1 (1,0) + \alpha_2 (0,1) = (0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Aber die Vektoren $(1,2,3)$, $(3,6,9)$ sind <u>linear abhängig</u> weil z.B

$3(1,2,3) + (-1)(3,6,9) = (0,0,0)$ aber

$3, -1$ sind nicht alle Null.

**Bsp 13.8** Ist $\alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1) = (0,0)$

dann $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (0,0)$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \hline 2\alpha_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Also sind $(1,1)$, $(1,-1)$ linear unabhängig.

---

$(1,0,-1,-1,0,0) + 1 \cdot (0,-1,1,0,1,0) + 1(-1,1,0,0,0,1) + 1(0,0,0,1,-1,-1)$

$= (0,0,0,0,0,0)$. Also Vektoren in $L$ sind linear abhängig.

## 13.5 Zeilenumformungen, Zeilenstufenform

(Helfen uns lineare Gleichungssysteme zu lösen.) Wir betrachten eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{Zeile } z_1 \\ \to \text{Zeile } z_2 \\ \\ \to \text{Zeile } z_n \end{array}$$

n Zeilen, m Spalten.

(U1) (Umformung 1) $z_j \to \alpha z_j$, $\alpha \in K \setminus \{0\}$.
Ersatz von $z_j$ durch $\alpha z_j$.

(U2) $z_j \to z_j + \beta z_k$, $\beta \in K$, $k \neq j$.

(U3) $z_i \leftrightarrow z_j$ (Zeilen werden vertauscht)

**Bsp 13.9**

$$\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{z_3 \to 2 z_3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{z_1 \to z_1 + 5 z_3}$ $\begin{pmatrix} 1+4\cdot 5 & 3+2\cdot 5 & 4+1\cdot 5 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Bem 13.1** Zeilen der ursprünglichen Matrix sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ Zeilen der umgeformten Matrix sind linear unabhängig

**Def** Eine Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \dots & c_{1m} \\ c_{21} \dots & c_{2m} \\ \vdots & \\ c_{n1} \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform (ZSF) falls es ein $r \in \{0, \dots, n\}$ und $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_r \le m$ gibt mit

(i) für $j = 1, 2, \dots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \dots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$.

(In einfachen Worten: das erste nicht Null Element einer Zeile kommt immer später).

(ii) für $j = r+1, \dots, n$ gilt $c_{jk} = 0 \;\; \forall k = 1, \dots, m$.

(Alle Zeilen nach der $r$-ten sind 0).

---

**Bsp 13.10** Die folgende Matrix $C$ ist in (ZSF

Stufe.

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$c_{32} = 0$

dritte Zeile → Zeilen zuerst

zweite Spalte → Spalten später.

$r = 3$, weil alle Spalten nach der 3-en Null sind.

$k_1 = 1$ → weil das erste Element der Zeile 1, das nicht Null ist in der Spalte 1 ist.

---

$k_2 = 3$ → weil das erste Element der Zeile 2, das nicht Null ist in der Spalte 3 ist

---

$k_3 = 4$ → weil das erste Element der Zeile 3, das nicht Null ist in der Spalte 4 ist

---

Man sieht, das $k_1 < k_2 < k_3$. (Das erste Element das nicht 0 ist kommt immer später).