5.4 Die Gleichung $z^n = c,\ c \in \mathbb{C}$ kann man lösen, wenn man c in Polarkoordinaten schreibt und benutzt

Satz 5.2 $z^n = re^{i\varphi}$ (*) hat die Lösungen

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)},\quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

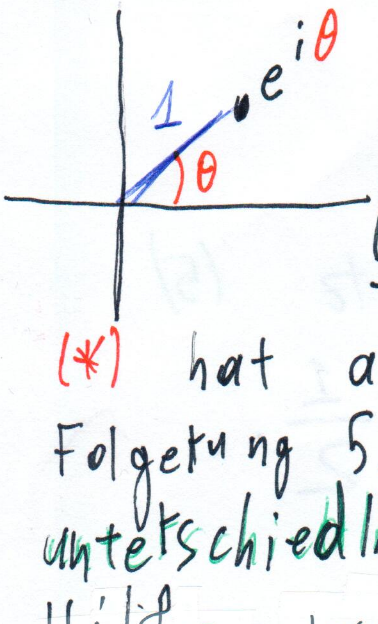
Bsp 5.5 Lösen Sie die Gleichung. $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$.

Lösung: Aus Bsp 5.1 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Also mit Anwendung des Satzes 5.2 bekommen wir die Lösungen $z_k = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{2\pi k + \frac{\pi}{3}}{4}\right)},\ k = 0, 1, 2, 3.$

$z_3 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{19\pi}{12}},\ z_0 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{12}},\ z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{12}},\ z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{13\pi}{12}}$

Beweisidee des Satzes 5.2 $(z_k)^n = \left[r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)}\right]^n$

$$= re^{i2\pi k + i\varphi} = re^{i\varphi}\underbrace{e^{i2\pi k}}_{=\underbrace{\cos 2\pi k}_{=1} + i\underbrace{\sin 2\pi k}_{=0} = 1} = re^{i\varphi}$$



$\boxed{e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}}$ (1)

Also z_k löst (*) $\forall\ k = 0, \dots, n-1$

(*) hat aber höchstens n Lösungen wegen der Folgerung 5.2. Also reicht es zuzeigen, dass z_k, $k = 0, \dots, n-1$ unterschiedlich sind. Das kann man mit Hilfe von (1) zeigen (Hausaufgabe).

der vorherigen Vorlesung

Natürlich ist es möglich, dass manche von den Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n$ in (**) gleich sind. Die <u>Vielfachheit</u> einer Nullstelle, gibt an, wie oft sie vorkommt.

Bsp 5.4: $p(x) = (x-1)^3 (x+1)^4$ hat die Nullstelle 1 mit Vielfachheit 3 und die Nullstelle -1 mit Vielfachheit 4

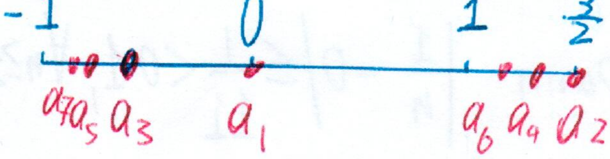
<u>6. Folgen und Konvergenz</u>

(In diesem Kapitel werden wir nur Zahlenfolgen diskutieren. Wir werden sie trotzdem einfach Folgen nennen).

<u>Def 6.1</u> Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ heißt (reele) Folge.

Schreibweisen: (a_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

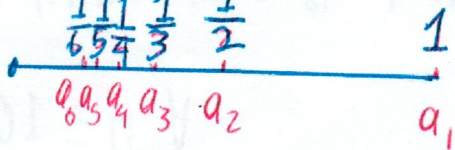
<u>Bsp 6.1</u>: (1) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (übung).



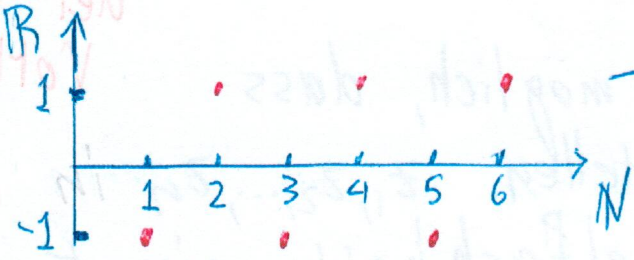
$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{2}{3}$,

$a_4 = \frac{6}{5}$, $a_5 = -\frac{4}{5}$.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$.



(3) $b_n = (-1)^n$.



→ In diesem Fall haben wir den Graphen der Abbildung skizziert. Oftmals ist aber praktisch die Folge auf der reele Achse zu skizzieren. wie in Beispielen (1),(2).

6.1 Konvergenz: Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert und wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim a_n = a$, $a_n \to a$, falls gilt

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underbrace{n_0}_{n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (abhängig von ε), so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

Intuitiv: Wenn n groß ist dann sind a_n, a nah von einander.

Bsp 6.2: $\frac{1}{n} \to 0$. Beispiele von ε.

$\varepsilon = 0.1 \rightsquigarrow$ Wir wählen $n_0 = 11$. Dann $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{11} < 0.1$, $\forall n \geq 11$

$\varepsilon = 0.01 \rightsquigarrow$ Wir wählen $n_0 = 101$. Dann $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{101} < 0.01$

$\forall n \geq 101$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen aus Satz 4.2

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (Folgerung des Vollständigkeitsaxioms).

Aber dann

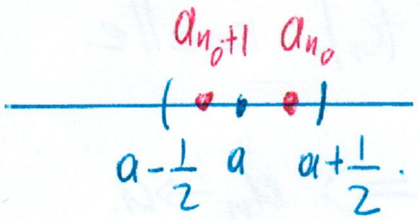
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Wenn $a_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann heißt (a_n) **konvergent**. / Ansonsten heißt sie **divergent**.

Limes / Grenzwert der Folge (a_n).

Bsp 6.3: $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Beweis: Wir nehmen an, dass $a_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Aus der Definition der Konvergenz mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt.



$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$.

Daraus folgt $\boxed{|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2},\ |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} \quad (*)}$

Aber dann $|a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |(a_{n_0} - a) + (a_{n_0+1} - a)|$

$\leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a|$ (Dreiecksungleichung).

$\overset{(*)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \implies \boxed{|a_{n_0} - a_{n_0+1}| < 1} \quad (**)$

Aber $|a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}|$

$= |(-1)^{n_0} + (-1)^{n_0}| = |2\,(-1)^{n_0}| \Longrightarrow$

$$\boxed{|a_{n_0} - a_{n_0+1}| = 2 \quad (***)}$$

Aus $(**)$ und $(***)$ bekommen wir Widerspruch. Also ist die Folge a_n nicht konvergent.

Bemerkung: Man kann $(*) \Longrightarrow (**)$ intuitiv verstehen. Da a_{n_0}, a_{n_0+1} nah von a sind müssen sie auch nah voneinander sein (siehe Skizze).

6.2 Grenzwertsätze: Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \leq c_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \leq b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow c_n \to a$.

(5) $a_n \to a$ und $b_n \to b \Longrightarrow a_n + b_n \to a + b,\ a_n b_n \to ab$.

Wenn $b \neq 0$ dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$ und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Bsp 6.4.: Berechnen Sie $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$.

Lösung: Beide Terme $\sqrt{n^2+n}$, n werden groß wenn $n \to \infty$. Ohne Wurzel wäre es einfacher zu berechnen. Deswegen multiplizieren wir Nenner und Zähler mit $\sqrt{n^2+n}+n$, und benutzen wir $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2+n}-n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Jetzt klammer wir n aus dem Nenner aus:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. \quad (6)$$

Aber $1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$ $\xrightarrow{\text{Grenzwertsatz (4)}}$

$$\downarrow \qquad \downarrow \text{ Da } \tfrac{1}{n} \to 0$$
$$1 \qquad\qquad 1$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1 \quad (7).$$

Aus (6), (7) und dem Grenzwertsatz (5)

folgt $\lim(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$.