Bemerkung zu den Grenzwertsätzen 6.2

Die Annahme $\forall n \in \mathbb{N}$, kann durch $\forall n \geq n_0$ ersetz werden

z.B Wenn $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \geq 10^6$ dann $c_n \to a$.

6.3 Monotone Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt

[streng] monoton wachend $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$ [$a_n < a_{n+1}$]

[streng] monoton fallend $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$ [$a_n > a_{n+1}$].

[streng] monoton $\Leftrightarrow$ [streng] monoton wachsend oder fallen.

Bsp 6.5 $a_n = -\frac{1}{2^n}$ ist streng monoton wachsend

da $a_{n+1} = -\frac{1}{2^{n+1}} > -\frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ weil $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$

also $\frac{-1}{2^n} < \frac{-1}{2^{n+1}}$.

$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{8} < \dots$

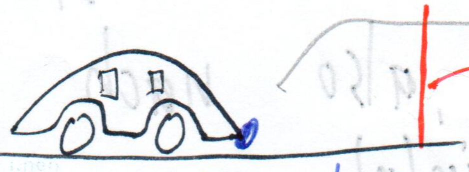
Ist a_n konvergent, dann ist sie beschränkt d.h $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt

$a_n = (-1)^n$ ist nicht konvergent (siehe Bsp 6.4) Aber

Satz 6.1 Ist (a_n) monoton wachsend [bzw. fallend] und nach oben [bzw. nach unten] beschränkt dann ist sie **konvergent**, gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Illustration im Fall monoton wachend. Alltag!!

Das Auto darf sich nur nach rechts bewegen.



Schranke: Das Auto darf nicht durch!

a_n: Ort des vorderen Teils des Autos n Sekunden nach den Anfang.

Irgendwo muss das Auto aufhören sich zu bewegen

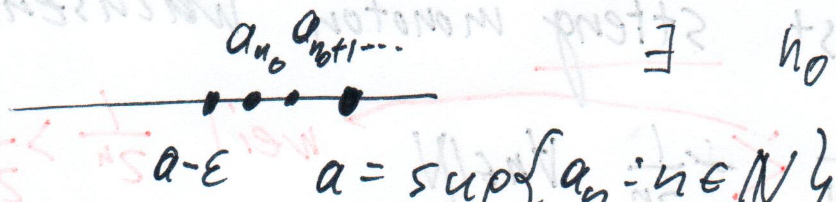
→ oder muss es einen Punkt approximieren

Ergänzung: Beweis des Theorems.

Sei $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\varepsilon > 0$

Dann $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ weil a die kleinste obere Schranke ist also

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$ (1)



Folge monoton wachsend

Dann $\forall n \geq n_0$ gilt $a - \varepsilon \overset{(1)}{<} a_{n_0} \leq a_n \leq a$

$a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Also $|a_n - a| < \varepsilon$, was zu zeigen war

Ergänzung: Bsp zu 6.2 Grenzwertsätzen (Satz (1)).

Es gilt $\left|\frac{\sin(n)}{n} - 0\right| \leq \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$

und $\frac{1}{n} \to 0$, also nach Grenzwertsatz (1) gilt $\frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Bsp 6.6 $a_n := -\frac{1}{2^n} \to 0 = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6.4 Wichtige Beispiele

(1) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ist $c > 0$ dann $\sqrt[n]{c} \to 1$.

(3) $a_n \to a \in \mathbb{R}$ dann $a_{n+1} - a_n \to 0 \Rightarrow a_{n+1} \to a$.

Beweis von $\sqrt[n]{n} \to 1$: Sei $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Dann $b_n \geq 0$ (1)

z.z $b_n \to 0$. In der Tat $(1+b_n)^n = (\sqrt[n]{n})^n = n$.

Also $n = (1+b_n)^n \underset{\text{Binomialsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k 1^{n-k}$

$\overset{(1)}{\geq} \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$. Also $b_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \to 0$

also nach (1) $b_n \to 0$.

6.5 Teilfolgen

: Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)\ \forall n \in \mathbb{N}$ dann heißt die Folge $(a_{k(n)})$. Teilfolge (TF) von (a_n).

In einfachen Worten: die Teilfolge ist eine neue Folge wo möglicherweise manche Terme weggelassen werden.

Bsp 6.7 $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ $\quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

$k(n) = 2n \rightsquigarrow a_{k(n)} = \frac{1}{2n}$ $\quad (a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots)$ $\quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots)$

$k(n)=3n+1 \quad a_{k(n)}=\frac{1}{3n+1} \quad (a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, \dots) \; \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \dots\right)$

Ein $b \in \mathbb{R}$ heißt <u>Häufungswert (HW) von (a_n)</u>, falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

<u>Bsp 6.8</u> $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

$k(n)=2n \rightsquigarrow a_{k(n)} = a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1.$

$k(n)=2n-1 \rightsquigarrow a_{k(n)} = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \to -1.$

Also sind $1, -1$ Häufungswerte von a_n.

a_n hat keine andere Häufungswerte weil die zwei konvergenten Teilfolgen a_{2n-1} oder $(a_1, a_3, a_5, a_7, \dots)$ und a_{2n} $(a_2, a_4, a_6, a_8, \dots)$ alle Elemente der Folge (a_n) haben.

Satz 6.2 (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte reelle Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge

Hauptidee des Beweises: Man zeigt, dass a_n eine monotone Teilfolge hat. Sie ist aber auch beschränkt also nach Satz 6.1 konvergiert.

<u>Bem 6.1-6.2</u> Es gibt auch komplexe Folgen (a_n) (nähmlich $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Mit Hilfe des Betrags kann man die Konvergenz gleich wie in <u>Def 6.1</u> definieren. Ist $a \in \mathbb{C}$ dann $a_n \to a \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$