6.6 Rechnen mit ∞: Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$a_n \to \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K.$$

$a_n \to -\infty$ ... $a_n < K$

Intuition a_n wird beliebig groß [klein] wenn n groß wird. Ähnlich

Konvetionen: $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$. Außerdem

$$\boxed{\begin{array}{l} a+\infty=\infty, \quad a-\infty=-\infty \\ a>0 \Rightarrow a\cdot\infty=\infty, \quad a\cdot(-\infty)=-\infty \\ a<0 \Rightarrow a\cdot\infty=-\infty, \quad a(-\infty)=\infty \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{\infty}=0 \\ \infty+\infty=\infty \\ -\infty-\infty=-\infty \\ \infty(-\infty)=-\infty \\ (-\infty)(-\infty)=\infty \end{array}}$$

Bem: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0(-\infty)$ sind nicht definiert.

Regeln: Sind $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

dann $a_n + b_n \to a+b$ falls $a+b$ definiert ist
$[a_n b_n \to ab]$ $[ab]$.

Bsp 6.9 $\lim_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} + n] = \infty$, weil

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} = \infty$ und $\infty + \infty$.

$\lim_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} - n]$ ist etwas schwieriger, da $\infty - \infty$ nicht definiert. Es gilt $\lim_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n} - n]$ (siehe Bsp 6.4).

6.7 Limes superior und Limes inferior:

Sei (a_n) eine reelle Folge und

$A = \{ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} :$ es gibt eine Teilfolge $a_{k(n)}$ mit $a_{k(n)} \to a \}$.

Immer gilt $A \neq \emptyset$.

Erlkärung: Wenn es keine Teilfolge $a_{k(n)}$ gibt mit $a_{k(n)} \to \infty$ oder $a_{k(n)} \to -\infty$, dann ist (a_n) beschränkt. Also hat (a_n) eine konvergente Teilfolge $a_{k(n)}$

(Satz 6.2) und $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k(n)} \in A$.

Satz: A hat immer ein Minimum und ein Maximum. (wobei, wenn z.B. $\infty \in A$ dann $\max A = \infty$)

Def 6.3 $\liminf a_n := \min A = \underline{\lim}\, a_n$.

$\limsup a_n := \max A = \overline{\lim}\, a_n$.

Wenn (a_n) beschränkt dann

$A = \{ a \in \mathbb{R} : a$ ist Häufungswert von $a_n \}$.

Also ist $\liminf a_n$ [$\limsup a_n$] der kleinste [größte] Häufungswert von (a_n).

Bsp 6.10: (1) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

a_n ist beschränkt. Wir haben dazu gezeigt (siehe Bsp 6.8), dass $-1, 1$ die einzigen Häufungswerte von a_n sind. Also

$$A = \{-1, 1\} \Rightarrow \liminf a_n = -1, \limsup a_n = 1.$$

(2) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) n.$

Die Folge $b_n := \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ erfüllt.

$b_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad b_2 = \cos(\pi) = -1,\quad b_3 = 0,\ b_4 = 1$

$b_5 = 0,\quad b_6 = -1,\quad b_7 = 0,\ b_8 = 1.$

(siehe nächste Seite).

Bemerkung 6.6 Sei (a_n) eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann

$$a_n \to a \Leftrightarrow A = \{a\} \Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

Zusätzlich $a_n \to a \Rightarrow a_{k(n)} \to a$ für alle Teilfolgen $a_{k(n)}$ von a_n.

Allgemein $b_{2n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $b_{4n-2} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_{4n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Also $a_{2n-1} = 0 \cdot (2n-1) = 0 \to 0$.

$a_{4n-2} = -1 \; (4n-2) = -4n+2 \to -\infty$.

$a_{4n} = 1 \cdot 4n \to \infty$.

Also ist $A = \{-\infty, 0, \infty\}$. A hat keine andere Elemente denn die Teilfolgen (a_{2n-1}), (a_{4n-2}), (a_{4n}) zusammen alle Terme der Folge a_n haben.

Insbesondere $\overline{\lim}\, a_n = \infty$, $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$ und (a_n) hat nur einen Häufungswert und zwar den Wert 0.

7 Reihen

Sei (a_n) eine Folge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Wie so?

Def 7.1 $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \ldots + a_N$ $\quad (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt Reihe

N-te Partial/Teilsumme.

Bezeichnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $:\Longleftrightarrow$ (S_N) konvergent

nach Definition

genau dann wenn

In diesem Fall $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N.}$

Bsp 7.1 Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.
konvergiert genau dann wenn $|z|<1$.
In diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. (z.B $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$)

Wir betrachten erst den Fall
$z=1$. Dann
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 1^n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N+1 \text{ Terme}} = N+1 = \infty.$$
Also ist die Reihe divergent.

Wenn $z \neq 1$ dann
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$$ (Übungsblatt 3 Auf 2a)

Fall 1: $|z|<1$. Dann
$$|z^{N+1} - 0| = |z^{N+1}| \overset{(*)}{=} |z|^{N+1} \longrightarrow 0.$$
Also $z^{N+1} \to 0$. Daraus folgt
$$S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \longrightarrow \frac{1}{1-z}, \text{ wenn } |z|<1.$$

(*) Aus der Eigenschaft $|w \cdot z| = |w||z|$ $\forall\, w, z \in \mathbb{C}$ folgt $|z^2| = |z \cdot z| = |z||z| = |z|^2$.
Mit Induktion, kann man zeigen $|z^n| = |z|^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Fall 2: $|z|>1$ Dann $|z^{N+1}| = |z|^{N+1} \to \infty$

Also ist $s_N = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}$ divergent.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ divergent

Fall 3: $|z|=1,\ z \neq 1$. Dann ist z^{N+1} divergent. Denn wenn $z^{N+1} \to a \in \mathbb{C}$. (1)

dann $z^{N+2} \to a$ (2) (z^{N+2} ist Teilfolge von z^{N+1}). Aber gleichzeitig.

$z^{N+2} = z\, z^{N+1} \xrightarrow{(1)} z \cdot a$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow$ $z\cdot a = a \Rightarrow (z-1)a = 0 \overset{z\neq 1}{\Rightarrow}$

$a=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} z^{N+1} \to 0$ was Widerspruch ist da $|z^{N+1}| = |z|^{N+1} = 1 \not\to 0$

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist. $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Also $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$S_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}}_{S_N} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}}}_{N \text{ Terme alle größer gleich als } \frac{1}{2N}}.$$

Also $S_{2N} \geq S_N + N \frac{1}{2N}$

$\Rightarrow \quad S_{2N} \geq S_N + \frac{1}{2}$ (1).

$\boxed{\text{Annahme: } S_N \to a,\ a \in \mathbb{R}} \Rightarrow S_{2N} \to a$, $S_N \to a$

Da S_{2N} eine Teilfolge von S_N ist. nach Annahme

Also $a \geq a + \frac{1}{2}$ Widerspruch.

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.