V 17

Satz 7.1 Seien (a_n) und (b_n) Folgen und

$s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.

(1) $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und s_N beschränkt

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Das bedeutet die Reihe ist konvergent und die Gleichheit gilt

---

Beweis von (4).

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Also
$$a_n = \underbrace{s_n}_{\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n} - \underbrace{s_{n-1}}_{\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n} \longrightarrow 0.$$

Bsp 7.3: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}$ ist divergent

da $\left|\frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}\right| \to \frac{1}{100}$.

Also $a_n = \frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}$ konvergiert nicht gegen Null. Wende 7.1 (4)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert wegen 7.1 (1)

$$s_N = \underbrace{\frac{1}{0!}}_{} + \underbrace{\frac{1}{1!}}_{\le \frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{\le \frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{\le \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{4!}}_{\le \frac{1}{2^3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{N!}}_{\le \frac{1}{2^N}} \le 1 + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{Bsp 7.1}}{=\!=\!=\!=} 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

und $\frac{1}{n!} \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Reihen: Konvergenzkriterien.

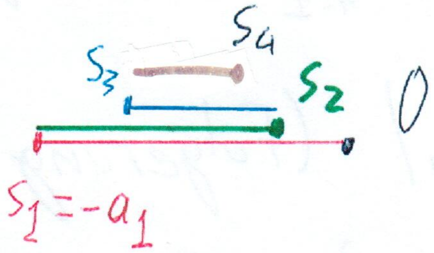
7.4 Leibnizkriterium:

Sei (a_n) reelle Folge

$a_n \to 0$, $a_n \geq 0$, a_n monoton fallend.

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n}_{\text{alternierende Reihe}} \text{ konvergent.}$$

(wenn $a_n \to 0$, $a_n \geq 0$ a_n monoton fallend)

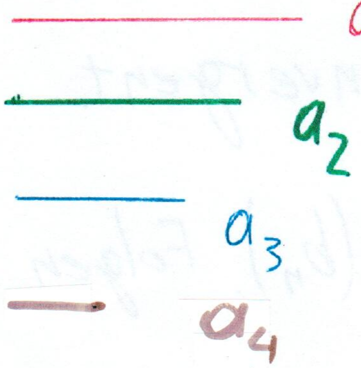


$s_1 = -a_1$

$s_2 = -a_1 + a_2$

$s_3 = -a_1 + a_2 - a_3 = s_2 - a_3$

$s_4 = s_3 + a_4$



$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0 \Rightarrow s_N$ oszilliert.

a_n monoton fallend $\Rightarrow$ Oszillationen werden immer kleiner

$a_n \to 0 \Rightarrow$ Oszillationen verschwinden.

Bsp. 7.4: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert,

da $\frac{1}{n} \geq 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ und $\frac{1}{n}$ monoton fallend.

7.2 Absolut konvergente Reihen

Def $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent,

wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Satz 7.2 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

und $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (Folgerung

der Dreiecksungleichung).

Aber z.B $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent

aber nicht absolut konvergent.

7.3 Majoranten / Minoranten Kriterium: (a_n), (b_n) Folgen, $n_0 \in \mathbb{N}$.

(1) $|a_n| \leq b_n \;\; \forall n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

(2) $a_n \geq b_n \geq 0 \;\; \forall n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bsp 7.5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$

$\frac{1}{n^{3/5}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (Bsp 7.2)

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ divergent nach Minoranten-kriterium.

Bsp 7.6 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = \frac{n^2}{\sqrt[10]{n^{26} + \underbrace{10n^{24}}_{\leq 10n^{26}} + \underbrace{20n^{10}}_{20n^{26}} + \underbrace{\sqrt{|\sin(\cos(n))|}}_{\leq 1 \leq n^{26}}}}$

Also $b_n \geq \frac{n^2}{\sqrt[10]{n^{26} + 10n^{26} + 20n^{26} + n^{26}}}$

$= \frac{n^2}{\sqrt[10]{32 n^{26}}} = \frac{n^2}{\sqrt[10]{32}\; n^2 n^{\cdot}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/5}} \geq 0$

Und da aus Bsp 7.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/5}}$ divergent ist, folgt dass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent ist.

Bsp 7.7 Ist $q \geq 2$ dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$. Denn

$\left|\frac{1}{n^q}\right| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ (1)

(Weil $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \Leftrightarrow n(n+1) \leq 2n^2 \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow 1 \leq n$

was stimmt also stimmt, dass $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ist aber konvergent,

weil $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{N+1}$. (kann man mit Induktion zeigen (Hausaufgabe)). also

$s_N \to 2$ und deshalb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$. (2)

Aus (1), (2) und dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent ist.

7.5 Wurzelkriterium: Sei (a_n) Folge und

$$c := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(1) $c < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(2) $c > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Hauptidee des Beweises

(1) Die ein bisschen stärkere Annahme

$\sqrt[n]{|a_n|} \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gibt

geometrische Reihe.

$|a_n| \le c^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ konvergiert

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(2) $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \limsup |a_n| > 1$

$\Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bem 7.2 Ist $c = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung.