Eine Matrix in ZSF heißt in <u>Zeilennormalform</u> (ZNF), wenn dazu gilt

(iii) für $j=1,\ldots,r$ gilt $\gamma_j = 1$ und

das erste nicht 0 Element jeder Zeile ist 1.

$c_{\ell k_j} = 0, \ \forall \ell = 1,\ldots,j-1$

oberhalb von γ_j stehen nur Nullen.

Bsp 13.16

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz: Jede Matrix in ZSF kann in ZNF durch Zeilenumformungen überführt werden.

Bsp 13.17

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to -1 Z_3]{Z_2 \to \frac{1}{3} Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 4 Z_3]{Z_2 \to Z_2 + \frac{5}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$z_1 \to z_1 + 2z_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13.7 – 13.8 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Matrix – Vektor – Produkt.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{pmatrix}$

$c \in \mathbb{C} \rightsquigarrow cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$.

Ist. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ (gleich wie $(x_1, \dots, x_m)$).

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j. \quad i = 1, \dots, n.$$

Bsp 13.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix}$

Eigenschaften $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$, $A(c\vec{x}) = c(A\vec{x}) = (cA)\vec{x}$.

Ein <u>(LGS)</u> Lineares Gleichungssystem

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m = b_n$$

x_1 ↳ gesucht.

a_{nm}, b_n → bekannt $\in K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

$$\Leftrightarrow \quad A\vec{x} = \vec{b} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

13.9 Lösungsmenge eines (LGS).

Ist $A \in K^{n \times m}$ n Zeilen m Spalten

Def: $\ker A = \{\vec{x} \in K^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq K^m$

$\operatorname{Bild} A = \{A\vec{x} : \vec{x} \in K^m\} \subseteq K^n$

$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = K^2 \qquad \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wahlen Sie die richtige Aussage. Kern A und Bild A haben Dimension.

(1) 1 und 1

(2) 2 und 1 ✓

(3) 1 und 2

(4) 2 und 2

(5) keine Ahnung.

Kern A $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Kern} A \iff x_2 + x_3 = 0$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in K \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

linear unabhängig

Also dim kern $A = 2$.

$A\vec{x}=\vec{b}$ hat Lösung $\iff$ $\vec{b}\in$ Bild A.

(Bild A: Alle $\vec{b}$, so dass $A\vec{x}=\vec{b}$ hat Lösung).

<u>Rang $A :=$ dim Bild A</u>

$$\text{Bild } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in K \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in K \right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Also Rang $A = 1$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Satz 13.2</u> (1) Kern A / Bild A ist ein Unterraum von K^m, K^n.

(2) Bild A = lin{Spalten von A}.

(3) Ist $A\vec{x}_0 = \vec{b}$, dann

$$\underbrace{\{\vec{x}\in K^m \text{ mit } A\vec{x}=\vec{b}\}}_{\text{Alle Lösungen von } A\vec{x}=\vec{b}} = \underbrace{\vec{x}_0}_{\text{eine Lösung}} + \underbrace{\text{Kern } A}_{\text{Alle Lösungen von } A\vec{x}=\vec{0}}.$$

Beweis von (2): Fall $n = m = 2$.

$$\text{Bild} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in K \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in K \right\}$$

$$= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\}.$$

Spalten von A.

<u>Folgerung</u>: Sei $A^T \rightarrow$ Matrix deren j-Zeile die j-Spalte von A ist (z.B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$). Um eine Basis von Bild A zu bestimmen, bringen wir A^T in ZSF. Die Zeilen dieser Matrix, die nicht Null sind, sind Basis von Bild A.

Erklärung: Bild A Satz 13.2

lin{Spalten von A} = lin{Zeilen von A^T}

= lin{ZSF von A^T}

weil die Zeilenumformungen den linearen Aufspann nicht ändern.

der Zeilen