Wählen Sie die richtige Aussage.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{1000}}$ ist

$\boxed{\text{Bsp } 7.8}$

1) konvergent

2) divergent

3) Konvergent für ungerade n und divergent für gerade n.

4) Konvergent für gerade n und divergent für ungerade n.

5) Keine Ahnung

Hinweis/Erinnerung $\sqrt[n]{n} \to 1$ (6.4 Bsp (2))

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\left|1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right|}{\sqrt[n]{n^{1000}}} = \frac{1+(-1)^n+\frac{1}{n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1000}}$$

Also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \overset{\sqrt[n]{n}\to 1}{=} \limsup\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$

$= 1 + \limsup\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right) \overset{\text{Bsp } 6.10}{=} 1+1=2$

Da $2>1$ divergiert die Reihe.

Bsp 7.8 Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{1000}}$.

Lösung: $a_n = \frac{\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{1000}}$. Also

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1+(-1)^n+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n^{1000}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1000}}\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right).$$

Da $\sqrt[n]{n} \to 1$ (6.4 Bsp (2)) bekommen wir

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{1^{1000}} \limsup\left(1+(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\limsup\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)}_{=1 \text{ (Bsp 6.10)}} = 2 > 1$$

Also konvergiert die Reihe nicht.

7.6 Quotientenkriterium: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $a_n$ eine Folge mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.

Sei $c_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $n \geq n_0$.

(1) $b := \limsup c_n < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent

(2) $\liminf c_n > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Intuition von (1): Die ein bisschen stärkere Annahme $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq b \ \forall n \in \mathbb{N}$ gibt $|a_{n+1}| \leq b|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow |a_{n+1}| \leq b^n |a_1|.$$

(2) Die verwandte Annahme $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_1 \neq 0$ gibt

$|a_n| \geq |a_1| \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n \not\to 0$.

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

7.9

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$$

$\forall z \in \mathbb{C}$. Also ist

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ konvergent } \forall z \in \mathbb{C}.$$

In der Tat gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z!!!!$$

# 7.9 Die Exponentialfunktion

Die Abbildung $E: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt die <u>komplexe Exponentialfunktion</u>.

Eigenschaften von $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) $E(0) = 1$, $E(1) = e$

(2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $E(z)E(w) = E(z+w)$.

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$ (i) $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$.

(ii) $E(nz) = (E(z))^n$

(4) $\forall x > 0$ gilt $E(x) > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) > 0$.

(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

(12) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\left| E(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^N}{N!} E(|z|).$$

Echter Wert (vom Computer nicht berechnenbar)

Approximation (vom computer berechnenbar).

Wenn klein dann wissen wir, dass der Fehler der Approximation klein ist.

Wir wollen, dass der Computer die Zahl $e=E(1)$ approximiert, mit Fehler weniger als 0,001. Mindestens wie viele Terme der Reihe soll der Computer addieren?

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6
5) 7 ✓
6) 8.
7) Keine Ahnung.

$\boxed{\text{Hinweis: } e \leq 3}$ (weil

$$\underbrace{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{\text{Definition}} = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n!}_{\geq 2^{n-1}}} \leq 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

(kann man z.B mit Induktion zeigen.

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

geometrische Reihe

Lösung: Nach Eigenschaft (12) ist der Fehler der Approximation durch die $N$ ersten Terme

$$< \frac{1^N}{N!} e^1 \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{3}{N!}.$$

Also wenn $\frac{3}{N!} < 0{,}001 = \frac{1}{1000}$

ist der Fehler sicher $< \frac{1}{1000}$.

$6! = 720$ reicht nicht aber

$7! = 5040$ also $\frac{3}{7!} < \frac{1}{1000}$.

Also wenn der Computer 7 Terme addiert ist Fehler $\leq 0{,}001$.

Partieller Beweis:

(1) $E(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow E(0) = 1$

$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Nach Definition $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$)

(3)-(5) folgen leicht aus (2)

z.B (2) $\Rightarrow$ 3(i) weil $E(z)E(-z) \overset{(2)}{=} E(z+(-z)) =$

$= E(0) \overset{(1)}{=} 1 \Rightarrow E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$.

Beweisidee von (2). Es gilt. $E(z)E(w) =$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}}_{\text{Terme mit gesamter Potenz } n.} \quad (*)$$

Diese Formel kann so verstanden werden: wenn wir die linke Seite "ausmultiplizieren" dann jedes Produkt hat gesamte Potenz $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die rechte Seite sortiert die Terme nach gesamter Potenz.

Aber $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \underset{\text{satz}}{\overset{\text{Binomial-}}{=}} \frac{1}{n!}(z+w)^n. \; (**)$$

Aus $(*)$, $(**)$ folgt $E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n$

$\Longrightarrow E(z)E(w) = E(z+w)$.

Illustration von $(*)$.

$$\underbrace{\frac{1}{0!}\frac{w}{1!} + \frac{z}{1!}\frac{1}{0!}}_{\text{Terme mit gesamter Potenz 1}} = \underbrace{\frac{z+w}{1!}}_{\text{erster Term von } E(w+z).}$$

$$\underbrace{\frac{1}{0!}\frac{w^2}{2!} + \frac{z}{1!}\frac{w}{1!} + \frac{z^2}{2!}\frac{1}{0!}}_{\text{Terme mit gesamter Potenz 2}} = \frac{1}{2}(w^2+2zw+z^2) = \underbrace{\frac{(z+w)^2}{2!}}_{\text{zweiter Term von } E(w+z).}$$

Sei $d := \underbrace{\frac{1}{0!}\frac{w^3}{3!} + \frac{z}{1!}\frac{w^2}{2!} + \frac{z^2}{2!}\frac{w}{1!} + \frac{z^3}{3!}\frac{1}{0!}}_{\text{Terme mit gesamter Potenz 3.}}$