

Beweis von (12).

$$\left| E(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

↓
Alle Terme
(n=0 bis ∞)

↓
Terme n=0
bis N-1

↓
Terme n=N
bis ∞

↓
Dreiecks-
ungleichung

$$\begin{array}{l} \underline{m = n - N} \\ n = m + N \end{array} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{m+N}}{(m+N)!} = |z|^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{(m+N)!}$$

↓
m fängt von 0
da m=n-N und
n von N anfängt

↓
ausgeklammert

$$\leq |z|^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m! N!} = \frac{|z|^N}{N!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} = \frac{|z|^N}{N!} E(|z|)$$

↓
(Da $(m+N)! \geq m! N!$)

$E(|z|)$

Andere wichtige Eigenschaften von $E(z) = e^z$

(7) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$.

(8) $\forall y \in \mathbb{R}$ gilt $|E(iy)| = 1$

(9) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$

Beweisideen: (7) $E(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} =$
 $= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{E(z)}.$

(8) $|E(iy)|^2 = E(iy) \overline{E(iy)} \stackrel{(7)}{=} E(iy) E(-iy)$

(2) $E(iy - iy) = E(0) = 1.$

(9) Mit Bsp. $|e^{3-6i}| = |e^3 e^{-6i}| = |e^3| |e^{-6i}|$

(8) $|e^3| = e^3 = e^{\operatorname{Re}(3-6i)}$

7.8 Das Cauchyprodukt.

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen.

Dann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

heißt Cauchy Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 7.4 Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, and so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Bsp Als wir zeigen wollten, dass

$E(z) E(w) = E(z+w)$, haben wir das Cauchy Produkt von $E(z)$ und $E(w)$ berechnet.

7.12 Sinus Cosinus

$$\text{Def: } \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

Eigen-
schaften

$$(1) \quad \sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

$$\text{z.B. } \sin 0 = \frac{1}{2i} (e^0 - e^0) = 0.$$

$$\text{ähnlich } \cos 0 = \frac{1}{2} (e^0 + e^0) = 1.$$

$$(2) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

(Tutorium)

Daraus folgt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$
wenn $x \in \mathbb{R}$, da alle Terme
der $\sin, \cos$ Reihen reell sind.

$$\text{Aus } \sin x \stackrel{(15)}{=} \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \Rightarrow i \sin x = \frac{1}{2} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$(\text{wir addieren}) \quad \boxed{\cos x + i \sin x = e^{ix}}$$

Euler Formel

Da $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$ folgt aus der Eulerformel

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

Ferner gilt $|e^{ix}| \stackrel{(8)}{=} 1$

$$\text{und } |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$$

$$(z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\Rightarrow |\cos x| \leq 1$$

$$|\sin x| \leq 1.$$

Eigenschaften $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \end{aligned}$$

folgt aus $e^{i(z+w)} = e^{iz} e^{iw}$ und aus der Eulerformel.

Bsp 7.11 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}).$$

Def 7.3 Potenzreihen $z_0 \in \mathbb{C} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Folge

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

→ Potenzreihe
($z \in \mathbb{C}$ Variable)

Koeffizienten

Entwicklungspunkt

Bsp 7.12(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 0)^n$ Exponentialreihe

$(a_n = \frac{1}{n!} \quad z_0 = 0)$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \quad a_n = 1, \quad z_0 = -1$

Konvergenz? Wurzelkriterium

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \frac{|z - z_0|}{R}, \text{ wobei } R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt Konvergenzradius. (Def 7.4)

Also

Satz 7.5 $|z - z_0| < R$ (oder $|z - z_0| < R$) $\Rightarrow$ Potenz

reihe absolut konvergent.

$|z - z_0| > R$ Potenzreihe divergent.

Illustration für
reelle Potenzreihen. (an reell) $z_0 \in \mathbb{R}$.



divergent

Bsp 7.13: Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right)^n (z - 1 - i)^n$
konvergent?

Koeffizienten $a_n = \left(\frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right)^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right|^n}$$

$$= \left| \frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right| = \begin{cases} \left| \frac{-1-3}{2} \right| = 2, & n \text{ ungerade} \\ \left| \frac{-1+3}{2} \right| = 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 2$

(größte Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|}$.)

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}$$

$$|z - 1 - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Potenzreihe konvergent}$$

$$|z - 1 - i| > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Potenzreihe divergent.}$$

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{2} ?$$

$$\left| \left(\frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right)^n (z - 1 - i)^n \right| = \left| \frac{-1 + (-1)^n 3}{2} \right|^n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$



Terme der Potenzreihe

$$\stackrel{|a|^n |b|^n = |ab|^n}{=} \left| \frac{-1 + (-1)^n 3}{4} \right|^n = \begin{cases} \left| \frac{-1-3}{4} \right|^n = 1, & n \text{ ungerade} \\ \left| \frac{-1+3}{4} \right|^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\rightarrow 0 \Rightarrow$ Potenzreihe divergent.

wenn $|z - 1 - i| = \frac{1}{2}$