Bsp 13.21 Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -13 & 1 \\ -5 & 4 & 23 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von Bild A.

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Aus Bsp 13.13

eine Zeilenstufenform von A^T ist

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist eine Basis

von A $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Insbesondere

Ist $\text{Rang}\, A := \dim A = 3$

__Bem__: $\dim \text{lin}\{\text{Spalten von } A\} = \dim \text{lin}\{\text{Zeilen von } A\}$. Also man kann deshalb Rang A

direkt bestimmen mit ZSF von A.
Beispiel: Auf 4 Übungsblatt.

Erinnerung $A \in K^{n\times m}$ $\operatorname{Kern} A = \{\vec{x} \in K^m : A\vec{x} = \vec{0}\}$.
Bild $A = \{A\vec{x} : x \in K^m\}$.

<u>Bsp 13.20.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, Dann

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} A$ weil $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Kern} A$ weil $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kern A ist die Menge der Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$. z.B.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} A$ weil $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung des Systems

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

ist. Das System hat Lösung also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild} A$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Bild} A$, weil $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$

keine Lösungen hat.

Lösungsalgorithmus des Systems $A\vec{x}=\vec{b}$, $A\in K^{n\times m}$ (Eliminations verfaren nach Gauß).

(1) Matrix A um $\vec{b}$ als Spalte erweitern.

(2) Die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF oder ZSF bringen.

(3) (i) Lösbarkeit und (ii) Lösung ablesen.

(i) $A\vec{x}=\vec{b}$ <u>nicht</u> lösbar $\Leftrightarrow$ $\exists\, j\in\{1,\dots,n\}$ mit $c_{jk}=0$ für $k=1,2,\dots,m$ und $c_{j(m+1)}\neq 0$.

(es gibt Spalte deren letztes Element nicht Null ist aber alle andere sind Null).

(ii) Sei $M=\{j\in\{1,\dots,m\}$: kein Element der Zeile j ist das erste nicht Null Element seiner Zeile$\}$. Dann werden die unbekannten x_j mit $j\in M$ freie Parameter und wir lösen bezüglich der anderen unbekannten auf.

(Hier $\vec{x}=(x_1,\dots,x_m)$).

<u>Bsp</u> 13.23 $A\vec{x}=\vec{b}$, wobei $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$.

und (i) $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, (ii) $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(i) $(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 16 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 12 & 12 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{z_2 \to z_2 - \frac{1}{2}z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 16 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{z_3 \to z_3 - 2z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 16 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \to$ ist in Zeilenstufenform

Das System ist nicht lösbar (es ist unmöglich, dass $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -\frac{5}{2}$).

(ii) $(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 12 & 12 & 0 \end{array}\right)$.

$\xrightarrow[\text{wie früher}]{\text{gleiche Umformungen}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$\xrightarrow{z_1 \to z_1 - 4z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{z_1 \to \frac{1}{2}z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

dritte/vierte Spalte.

$M = \{3, 4\}$.

Also $x_3 = s$, $x_4 = t$ ($s,t \in \mathbb{R}$ freie Parameter).

und
$$\left.\begin{array}{l} 1x_1 + 4x_3 = 0 \\ 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[x_4 = t]{x_3 = s} \begin{array}{l} x_1 = -4s \\ x_2 = -2s - 3t. \end{array}$$

Also sind alle Lösungen von der Form.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

<u>Bem</u>: Man muss nicht die Matrix in ZNF bringen, ZSF reicht. Trotzdem ist meistens effizienter die Matrix in ZNF zu bringen bevor die Lösung gelesen wird.

Um den $\text{Kern } A = \{\vec{x} \in K^m : A\vec{x} = \vec{0}\}$, $A \in K^{n \times m}$ zu bestimmen, bestimmt man die Menge der Lösungen von $A\vec{x} = \vec{0}$. z.B wenn A wie im Vorherigen Beispiel ist dann

$$\text{Kern } A = \left\{ s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternativ: (1) Wir bringen A in ZNF

(2) Wir streichen die Zeilen, die Null sind (wenn es sie gib

3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind. Die Ergänzung wird so gemacht damit alle diagonale Elemente $-1, 1$ sind (bis auf ein Element, das -1 ist)

(4). Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

<u>Bsp 13.24</u> A wie

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{davor gemacht}]{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3te Zeile wird gestrichen.}]{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)}$$

$$\text{Kern}\, A = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<u>Dimensionsformel</u>: Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann

$$\dim \text{Kern}\, A + \dim \text{Bild}\, A = n.$$

<u>Def</u> $\text{Rang}\, A = \dim \text{Bild}\, A$.

Wieso stimmt der -1 Ergänzungstrick?

Das kann man Teilweis mit Hilfe des Beispieles 13.29 beantworten. Das System

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

wenn man x_3, x_4 frei variiere lässt kann man umschreiben

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_2 + 4Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4s \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2s \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4s \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t \end{array}\right) \longrightarrow$$

man erkennt den Vektor

$$-s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 3Z_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2s + 3t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4s + 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2s + 3t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -s + 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

und den Vektor $-t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.