

Satz 7.6
Konvergenzradius R , über Quotienten):

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Wenn

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty, \text{ dann } R = \frac{1}{\alpha}.$$

Bsp 7.14: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z-i)^n$, $R = ?$

Lösung $a_n = \frac{n^n}{n!}$ [Mit Fakultät betrachtet man meistens Quotienten].

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$\frac{(n+1)! = n! (n+1)}{n+1} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e$$

Also $R = \frac{1}{e}$.

Achtung!!: $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ oder $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

geben nicht an, was der Konvergenzradius ist. (Beispiel in Übung).

8 Stetigkeit

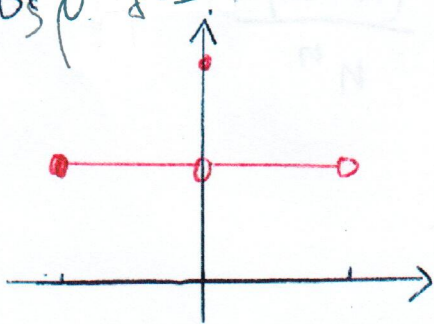
8.1 Limes, Stetigkeit, Kriterien

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen
Def 8.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass

$$0 < \underbrace{|x - x_0|}_{\substack{x \text{ darf nicht} \\ x_0 \text{ sein}}} < \underbrace{\delta}_{\substack{x \text{ ist nah} \\ \text{bei } x_0}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - y|}_{\substack{f(x) \text{ ist nah} \\ \text{bei } y}} < \varepsilon$$

Bemerkung 8.1 Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit D ein ^{von} Intervall oder z.B. endliche Vereinigung Intervallen. Es soll aber sinnvoll sein, den Limes zu betrachten. In dieser Vorlesung ist mit D eine solche Menge gemeint.

Bsp 8.1: Sei $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit



$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } x=0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{Dann } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

In der Tat, sei $\varepsilon > 0$.
Wir wählen $\delta = 1$. Dann

$$0 < |x - 0| < 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow |g(x) - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Ähnlich gilt $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 1$,

obwohl -1 am
Ende (Anfang)
des Intervalls
 $[-1, 1)$ ist

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$.

obwohl 1
kein Element
des Intervalls
 $[-1, 1)$ ist.

Es ist nicht sinnvoll z.B. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ zu betrachten.

Def. 8.2

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. f heißt stetig
in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp 8.2: Die Funktion g^* ist nicht
stetig in 0 , da $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \neq 2 = g(0)$.

g ist stetig in -1 da $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 1 = g(-1)$.

Die Frage ob g stetig in 1 ist,
ist nicht sinnvoll, da g nicht in
 1 definiert ist.

* des vorherigen Beispiels.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig $\Leftrightarrow f$ ist stetig in $x \forall x \in D$.

Satz 8.1 : (i) Alle folgende Funktionen sind stetig:
Polynome, $\sin x$, $\cos x$, e^x , x^p ($p \in \mathbb{R}$, $x > 0$),
 x^p , ($p \geq 0$, $x \geq 0$).

(ii) Ist f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

(iii) f, g stetig in $x_0 \Rightarrow f+g, f \cdot g$ stetig in x_0 . Wenn dazu $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0 .

Bsp 8.3 : $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = (x^2 + 2x) \cos x$
sind stetig, als Produkt stetiger Funktionen. Ebenso ist die Funktion.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 2x) \cos x) \\ = e^{(x^2 + 2x) \cos x} \sin((x^2 + 2x) \cos x). \text{ stetig}$$

Bsp 8.4 Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1. \end{cases}$

$a \in \mathbb{R}$. Wenn $x \neq 1$ dann $x - 1 \neq 0$, also ist h stetig in x als Quotient stetiger Funktionen.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist h stetig in 1?

$\forall x \neq 1$ gilt

$$\frac{x^4-1}{x-1} = \frac{x^4-1^4}{x-1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = x^3+x^2+x+1$$

$$\text{Also } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3+x^2+x+1) = 1^3+1^2+1+1=4$$

$$\text{Also } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 4$$

Aber

$$h(1) = a$$

$\Rightarrow h$ ist stetig in $1 \Rightarrow a=4$

Satz 8.2

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ für alle Folgen

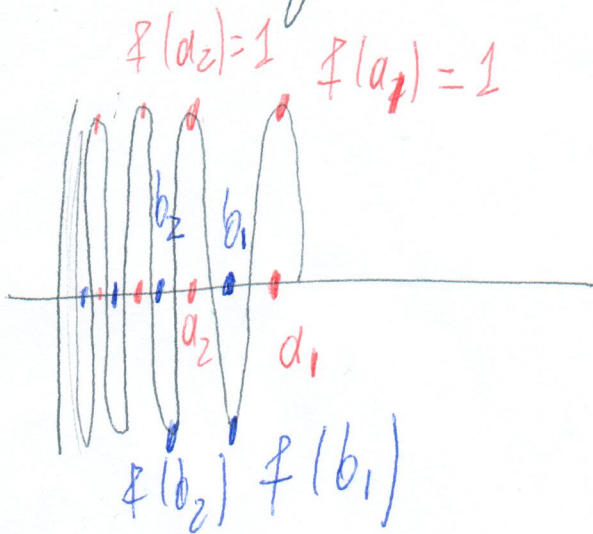
in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$.

Achtung: es ist sehr wichtig, dass x_n nicht x_0 sein darf, da im Fall der Existenz von $y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, kann es sein, dass $y \neq f(x_0)$.

(Der Satz ist sinnvoll, nur wenn es sinnvoll ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ zu betrachten.)

Bsp 8.5 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$ Ist f für kein

a stetig.



Sei $a_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$

$b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$

Dann $a_n \rightarrow 0$ und $b_n \rightarrow 0$.

Aber $f(a_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$. (1)

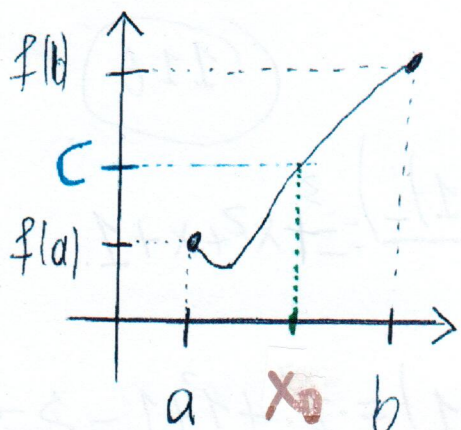
und $f(b_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 \rightarrow -1$.

Aber wäre f stetig in 0 dann wäre

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = a \xrightarrow{\text{Satz 8.2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = a \quad \forall (x_n)$

mit $x_n \rightarrow 0$ was Widerspruch zu (1) und (2) ist. S. 2 Zwischenwertsatz.

Satz 8.3 (Zwischenwertsatz): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b]$ stetig. Wenn $f(a) < f(b)$ [bzw. $f(a) > f(b)$] und $f(a) < c < f(b)$ [$f(a) > c > f(b)$] dann $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = c$.



Alle Werte zwischen $f(a)$, $f(b)$ werden angenommen.

Bsp 8.6 : Das Polynom $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ hat Nullstelle in $[1, 2]$

Lösung: p ist Polynom also stetig. Außerdem

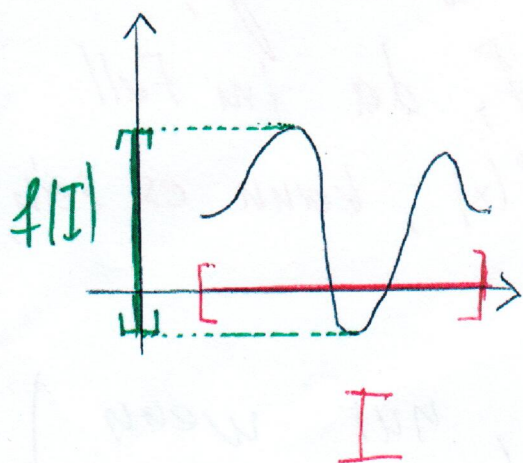
$$p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = -1 < 0$$

$$p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 1 > 0$$

Zwischenwertsatz

$$\exists x_0 \in (1, 2) \text{ mit } p(x_0) = 0$$

Folgerung: Sei I Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.



Sei $h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1^4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1. \end{cases}$ Für welche
(Bsp 8.4)

$a \in \mathbb{R}$ ist h stetig in 1.

1) $\forall a \in \mathbb{R}$

2) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

3) Nur für $a = 1$.

4) Nur für $a = 4$. ✓

5) Nur für $a = 2$

6) keine der obigen Antworten stimmt

7) keine Ahnung.