8.3 Einseitige Grenzwerte

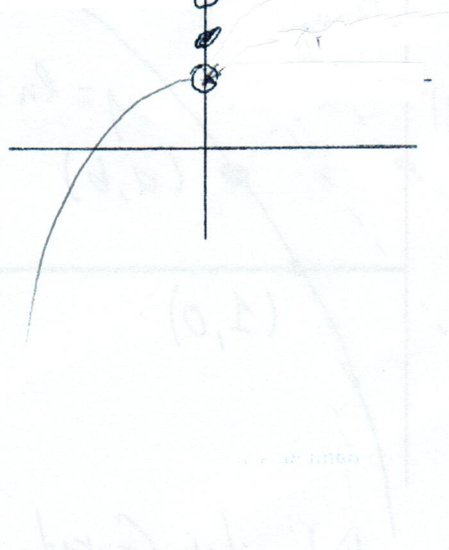
Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0, y \in \mathbb{R}$.

Def. 8.3 $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = y$ [bzw. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = y$]

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass

$$\underbrace{x_0 < x < x_0 + \delta}_{\text{x ist nah bei } x_0 \text{ aber größer als } x_0} \ \left[\text{bzw. } \underbrace{x_0 - \delta < x < x_0}_{\text{x ist nah bei } x_0 \text{ aber kleiner als } x_0}\right] \implies \underbrace{|f(x) - y| < \varepsilon}_{f(x) \text{ ist nah bei } y}$$

In diesem Fall heißt y rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von f in x_0.



Bsp 8.3.1 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1{,}5, & x = 0 \\ 2 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

Dann $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 1$

$\boxed{\text{Satz 8.4}}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y \iff \boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = y \\ \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = y \end{array}}$,

$\boxed{\text{Bem}}$ Die Def 8.3 und Satz 8.4 sind anwendbar füt Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$, wenn es sinnvoll ist $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ zu betrachten

<u>Bsp 8.3.2</u> Sei $f: [-5,5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x-1+b)^2, & \text{wenn } x<1 \\ b, & x=1 \\ -1+ax, & \text{wenn } x>1. \end{cases}$$

Füt welche $a \in \mathbb{R}$, $b>0$ ist f stetig in 1?

<u>Lösung</u>: f ist stetig in $1 \iff$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \iff \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$$

Aber $f(1)=b$

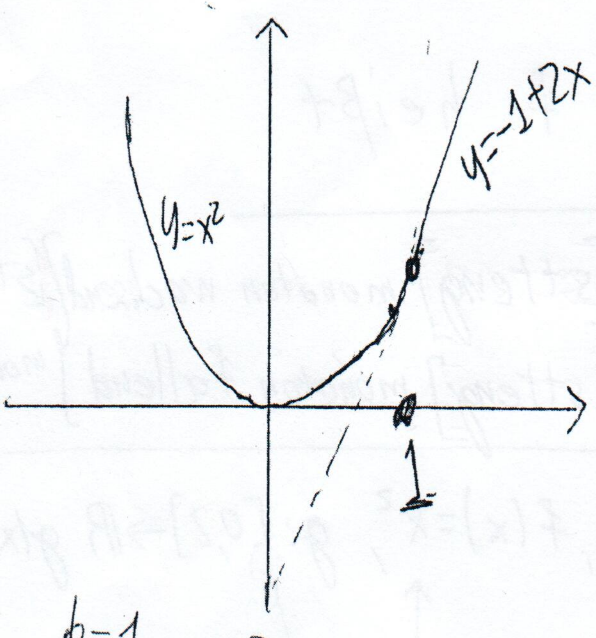
$f(x)=(x-1+b)^2$ für $x<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=b^2$.

$f(x)=-1+ax$ für $x>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-1+a$.

Also $b=b^2=-1+a$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aber } b=b^2 \xRightarrow{\text{Da } b>0} b=1 \\ b=-1+a \Rightarrow a=b+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a=2,\ b=1$.



Bemerkung: Es ist nicht sinnvoll $\lim\limits_{x\to 5+} f(x)$ oder $\lim\limits_{x\to -5-} f(x)$ zu betrachten.

$b=1,\ a=2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ -1+2x, & x>1. \end{cases}$$

Bem 8.3: Man kann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$ definieren mit $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = y$, mit $x_0 \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

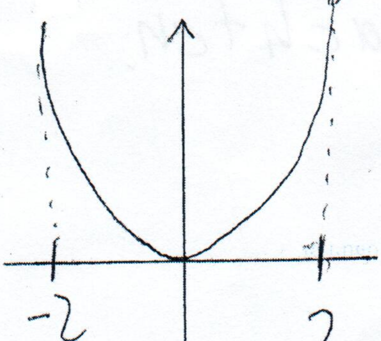
Die Definitionen sind ähnlich, wie im Fall von Folgen und die Intuition ist die gleiche.

8.4 Monotone Funktionen

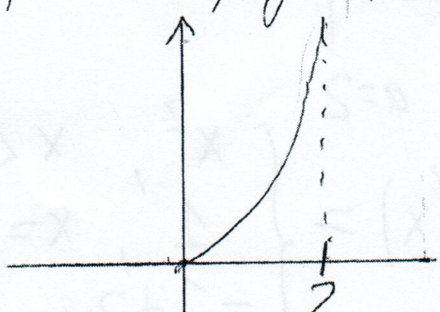
Def 8.4 Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, und $f: D \to \mathbb{R}$.

Wenn $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt	f heißt	
$f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$	[streng] monoton wachsend	[streng] monoton
$f(x_1) \geq f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$	[streng] monoton fallend	

Bsp. 8.4.1: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g: [0,2] \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$.

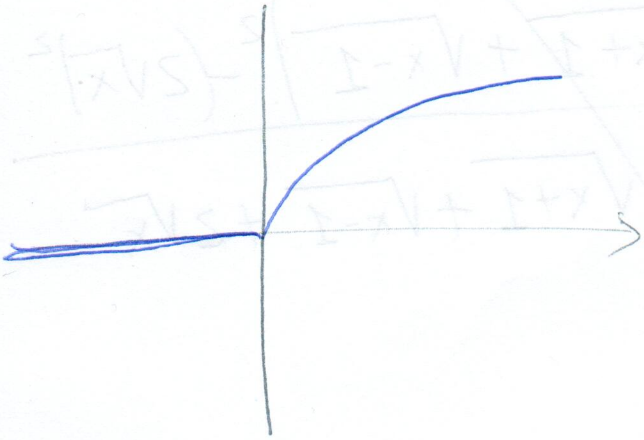


f nicht monoton

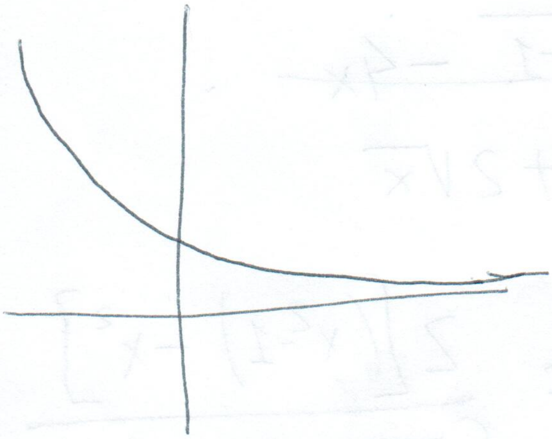


g streng monoton wachsend.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



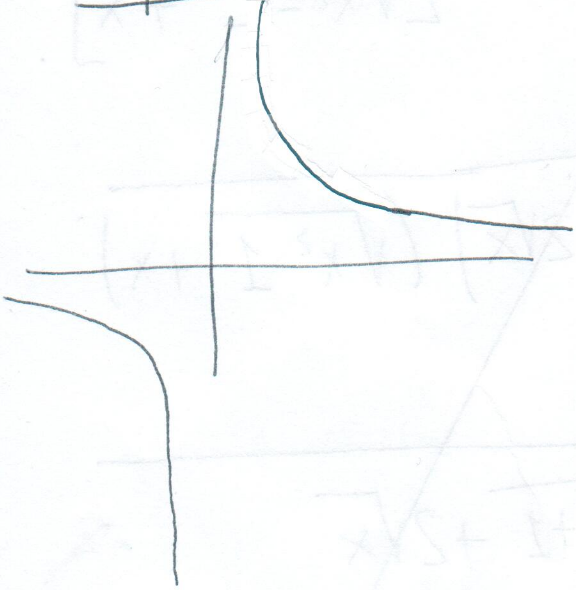
ist monoton wachsed aber nicht streng monoton wachsend.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x}$ ist streng monoton fallend

Bsp 8.3.3

Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$



Dann $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$.

($\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ ist falsch!)

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$

$$x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$$

Bsp 8.3.4 $\quad f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x\left(\underbrace{\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}}}_{a} - \underbrace{3}_{b}\right). \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = ?$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2+ab+b^2} \quad (\text{da } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Also
$$\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}} - 3 = \frac{\overbrace{\left(\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}}\right)^3 - (3)^3}^{=27+\frac{1}{x}-27=\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}}\right)^2 + 3\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}} + 3^2}$$

Also
$$f(x) = \frac{\cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}}{\left(\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}}\right)^2 + 3\sqrt[3]{27+\frac{1}{x}} + 3^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{27}\right) + 3^2} = \frac{1}{3^2+3^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{27}.$$

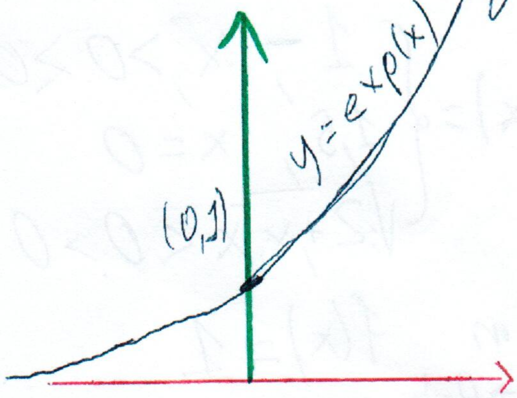
Satz 8.5 $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [fallend].

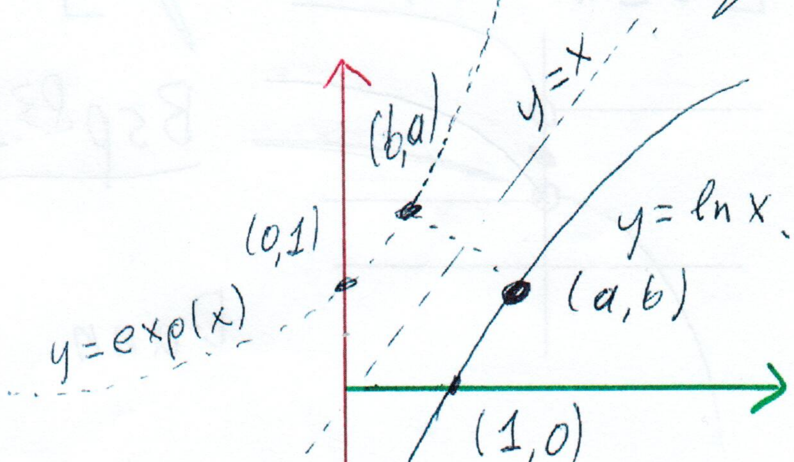
(a) Dann ist f injektiv und $f^{-1}: f(I) \to I$ ist streng monoton wachsend [fallend].

(b) Ist f auch stetig, so ist $f(I)$ Intervall und $f^{-1}: f(I) \to I$ ist stetig.

Bsp 8.42 Die Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend, und stetig. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Ihre Umkehrabbildung $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) Logarithmus, und ist auch streng monoton wachsend und stetig.





Die Umkehrabbildung vertauscht die Rolle von x,y.
$\Rightarrow$ Ihr Graph ist Reflektion des Graphen der Abbildung bezüglich der Geraden $y=x$.