Dimensionsformel: Sei $A \in K^{n \times m}$

dann $\dim \operatorname{Kern} A + \dim \operatorname{Bild} A = m$

Bsp. 13.25: Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bsp 13.19 (vor 2 Wochen)

$\dim \operatorname{Kern} A = 2$, $\dim \operatorname{Bild} A = 1$.

Also $\dim \operatorname{Kern} A + \dim \operatorname{Bild} A = 3$

Bsp 13.26 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie eine Basis von Bild A.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lös: Im Bsp 13.24 haben wir gezeigt

$\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Kern} A = 2$.

Aber wegen der Dimensionsformel

dim Kern A + dim Bild A = 4 $\Rightarrow$

dim Bild A = 2

Aber $\text{Bild}A \underset{\text{Satz 13.2.}}{=} \text{lin}\{\text{Spalten von } A\}$

und die 2 Spalten $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig (weil nicht parallel). also sind sie Basis von Bild A.

(ii) $\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ zweite Spalte von A. Also hat $A\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ die Lösung $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Aber nach Satz 13.2 ist Menge aller Lösungen $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \text{Kern}A$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\0\\-1\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Satz / Bemerkung: $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung $\iff$ $\text{Rang } A = \text{Rang } (A \mid \vec{b})$.

13.12 Produkt von Matrizen

Seien $n, m, q \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times q}$, $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$,

$B = (b_{kl})_{k=1}^{m}{}_{l=1}^{q}$. Dann $AB = C \in K^{n \times q}$.

mit $C = (c_{jl})_{j=1}^{n}{}_{l=1}^{q}$ mit.

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}$$

l-te Spalte von B.

$$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{pmatrix}$$

j-te Zeile von A $(a_{j1} \; a_{j2} \; \dots \; a_{jm})$

Bsp 13.12.1
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-2)\frac{1}{2} \\ 0\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 1+2\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Produkts.

$(\alpha A+\beta B)C=\alpha AC+\beta BC$, $A(\beta B+\gamma C)=$

$\boxed{(AB)C=A(BC)}$ $\quad = \beta AB+\gamma AC.$

$\forall \alpha,\beta,\gamma\in K$ $\quad\forall A,B,C$ Matrizen so das die Produkte definiert sind.

Es kann sein, dass AB definiert ist, aber BA nicht. Es kann auch sein, dass beide definiert sind aber $AB\neq BA$.

Bsp 13.12.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \neq BA.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{CA = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nicht definiert}}.$$

13.13 Invertierbare Matrizen

Sei $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$

$I_n := (\delta_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{n}$ heißt <u>Einheitsmatrix</u>

z.B $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in K^{n \times n}.$$

$$I_n \vec{x} = \vec{x}.$$

$A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn $\exists\ B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA = I_n$.

In diesem Fall schreibt man $B = A^{-1}$ (Inverse von A).

<u>Bem</u> $A\vec{x} = \vec{b} \iff \underbrace{A^{-1}A\vec{x}}_{I_n\vec{x}=\vec{x}} = A^{-1}\vec{b} \iff$

$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

<u>Satz 13.4</u> $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar

$\iff \exists\ B \in K^{n\times n}$ mit $AB = I$

$\iff \exists\ C \in K^{n\times n}$ mit $CA = I$.

es reicht eine Gleichheit zu überprüfen

$\iff \operatorname{Bild} A = K^n \iff \ker A = \{0\}$.

$\iff \dim \operatorname{Bild} A = n$ <u>(A ist regulär)</u>

<u>Bsp 13.13.1</u> $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

also $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist invertierbar

und $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.