Satz 8.5 $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [fallend].

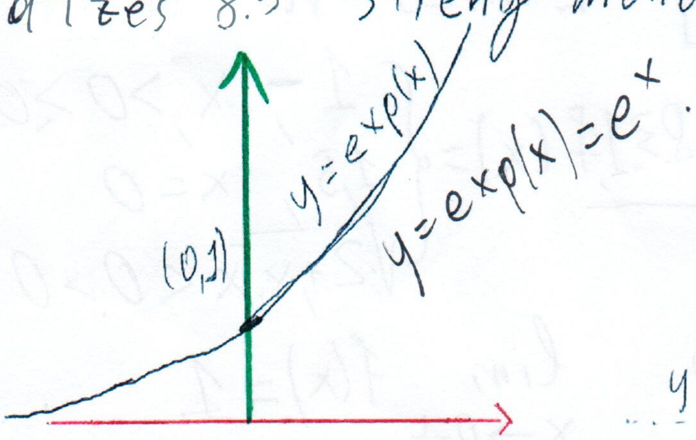
(a) Dann ist f injektiv und $f^{-1}: f(I) \to I$ ist streng monoton wachsend [fallend].

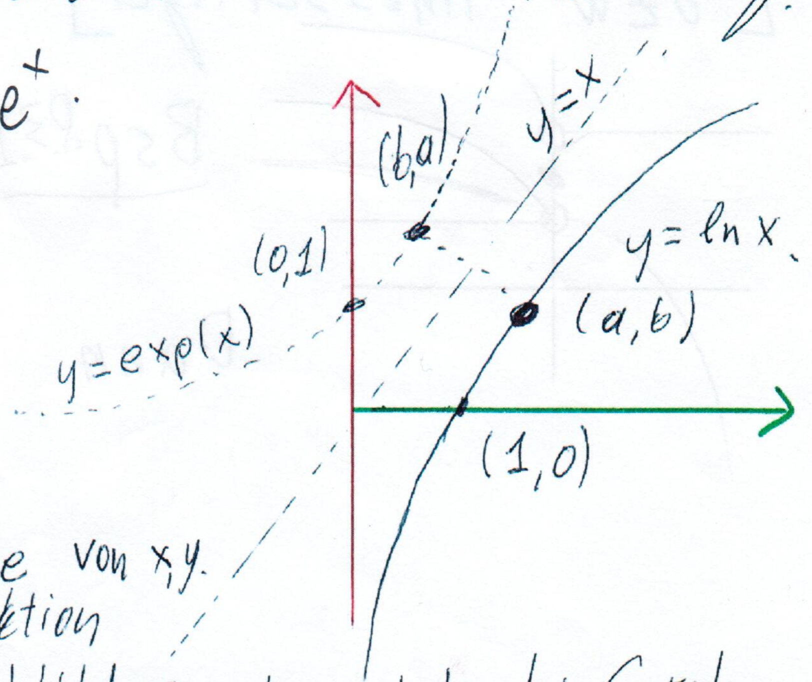
(b) Ist f auch stetig, so ist $f(I)$ Intervall und $f^{-1}: f(I) \to I$ ist stetig.

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Def 9.1 Die Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Ihre Umkehrabbildung $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) Logarithmus, und wegen des Satzes 8.5 streng monoton wachsend und stetig.





Die Umkehrabbildung vertauscht die Rolle von x, y.

$\Rightarrow$ Ihr Graph ist Reflektion des Graphen der Abbildung bezüglich der Geraden $y = x$.

Es gilt $e^x = y \iff \ln y = x$.

$e^{\ln y} = y$, $\ln(e^x) = x$.

Bsp 9.1 Welche Aussage stimmt?

(1) $\ln\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ ✓ (2)

(2) $\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ Hinweis: benutzen Sie $\exp(x)$.

(3) $\ln\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$.

(4) keine Ahnung

$\ln\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \iff e^{\ln\frac{1}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$.

Da exp streng monoton wachsend

(1)

$\iff \frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}} \iff e^{\frac{1}{2}} < 2$.

Was gilt weil $e < 3$ also

$e^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{1}{2}} = 2$.

$\frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}} \iff 2e^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} < 2e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$

$\iff e^{\frac{1}{2}} < 2$.

Eigenschaften: $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$.

$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, (1) $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$. (2)

$\forall\ x,y>0$ gilt $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x)-\ln(y)$.

z.B $$\left.\begin{array}{l} e^{\ln(xy)} = xy \\ e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} = xy \end{array}\right\} \xRightarrow{e \text{ injektiv}}$$

$\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$. z.B $\ln(10) = \ln 2 + \ln 5$

Bsp 9.2 Zeigen Sie,

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln x + x$ hat genau eine Nullstelle in $(0,\infty)$.

Geben Sie ein Intervall mit Länge höchstens $\frac{1}{2}$, das die Nullstelle enthält.

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\ln x + x) \overset{(2)}{=} \infty+\infty = \infty$.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (\ln x + x) \overset{(1)}{=} -\infty + 0 = -\infty$.

Also für x nah bei Null $f(x)<0$ und für x groß $f(x)>0$. f ist auch stetig als Summe stetiger Funktionen $\xRightarrow{\text{Zwischenwertsatz}}$ $\exists\, x_0 \in (0,\infty)$ mit $f(x_0)=0$. f ist streng monoton wachsend als Summe streng monoton wachsender Funktionen also injektiv deshalb ist x_0 eindeutig.

(ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 0$ (Bsp 9.1).

$f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0.$

Weges des Zwischenwertsatzes

$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Die allgemeine Potenz.

$\forall\, a>0$ gilt $a = e^{\ln a}$. Wir definieren also $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften $a^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ stetig

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a.$$

$$(a^y)^x = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x \ (\forall a,b>0).$$

Sei $a>0$, $a \neq 1$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrabbildung $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. (Logarithmus zur Basis a).

Also $\log_a(a^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^{\log_a y} = y$, $\forall y \in (0,\infty)$

Bem Für $a>1$, sehen die Graphen von a^x, $\log_a x$ ähnlich, wie die Graphen von e^x, bzw $\ln x$.

Bsp 9.3: $\log_{10} 1000 = 3$, da $10^3 = 1000$.

$$\left.\begin{array}{l} 23 \le \log_{10} N < 24 \\ \text{und } N \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow N \text{ hat 24 Ziffern.}$$

(z.B. die Avogadro Zahl).

Bsp 9.4 Seien $x, b > 0$ und $a > 1$. Dann $\log_a(x^b)$ ist gleich.

(1) $b \log_a(x)$ ✓

(2) $(\log_a(x))^b$

(3) $\log_a(x) + \log_a(b)$.

(4) $\log_a(x) \log_a(b)$

(5) keine der obigen Antwotten stimmt

(6) keine Ahnung.

$y = \log_a(x^b) \Leftrightarrow a^y = x^b \Leftrightarrow$

$a^{\frac{y}{b}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \log_a(x) \Leftrightarrow y = b \log_a(x)$

Bsp 9.6 (i) Zeigen Sie, dass

$$\log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) = 2 - \log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2}) \quad (1)$$

(ii) Für welche $x>0$ gilt $x^{\log_{10} x} = 100x$. (2)

(i) (1) $\iff \log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) + \log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2}) = 2$

$\overset{\text{Da } \ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)}{\iff} \log_3\left((\sqrt{11}-\sqrt{2})(\sqrt{11}+\sqrt{2})\right) = 2$

$\iff \log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9$ was wahr ist

deshalb ist (1).

(ii) (2) $\overset{\log_{10} \text{ injektiv}}{\iff} \log_{10}\left(x^{\log_{10} x}\right) = \log_{10}(100x)$

$\iff \underbrace{(\log_{10} x)^2}_{\text{Siehe Bsp 9.5}} = \underbrace{2 + \log_{10}(x)}_{\text{Da } \log_{10}(100 \cdot x) = \log_{10} 100 + \log_{10} x = 2 + \log_{10} x}$.

Sei $y = \log_{10}(x)$. Dann

$y^2 = 2+y \iff y^2 - y - 2 = 0 \iff y = -1$ oder $y = 2$.

Also $\log_{10}(x) = -1$ oder $\log_{10}(x) = 2$.

$\iff x = 10^{-1}$ oder $x = 10^2$.

Satz 9.1: $\forall a,y \in (0,\infty)$ gilt $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

Beweis: Sei $\log_a y = x$ (1). Da

$\log_a y = x \Rightarrow a^x = y \Longrightarrow e^{x \ln a} = y \Longrightarrow$

$\ln e^{x \ln a} = \ln y \Longrightarrow x \ln a = \ln y$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \log_a y \ \ln a = \ln y \Rightarrow \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

stimmt die Aussage.

Bsp 9.5 $\log_{10} e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 10} = \frac{2}{\ln 10}$.