

$A \in K^{n \times n}$ invertierbar

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{Zeilenumformungen}} (I_n \mid A^{-1})$$

Bsp 13.13.2 (Klausur H 2015)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} \quad \underline{\text{Lös:}}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1} \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - \frac{1}{2} Z_3} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2} \\ Z_3 \rightarrow \frac{1}{2} Z_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Also} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Bsp 13.13.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$$

(1) ist $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

(2) existiert nicht. ✓

(3) ist $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) keine der obigen Antworten stimmt

(5) keine Ahnung.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_2 \rightarrow z_2 - 4z_1 \\ \sim \\ z_3 \rightarrow z_3 - 7z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ z_3 \rightarrow z_3 - 2z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

↓
deshalb ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nicht

invertierbar.

13.11 Linear Abbildungen

Seien V, W K -Vektorräume
 $\phi: V \rightarrow W$ heißt linear

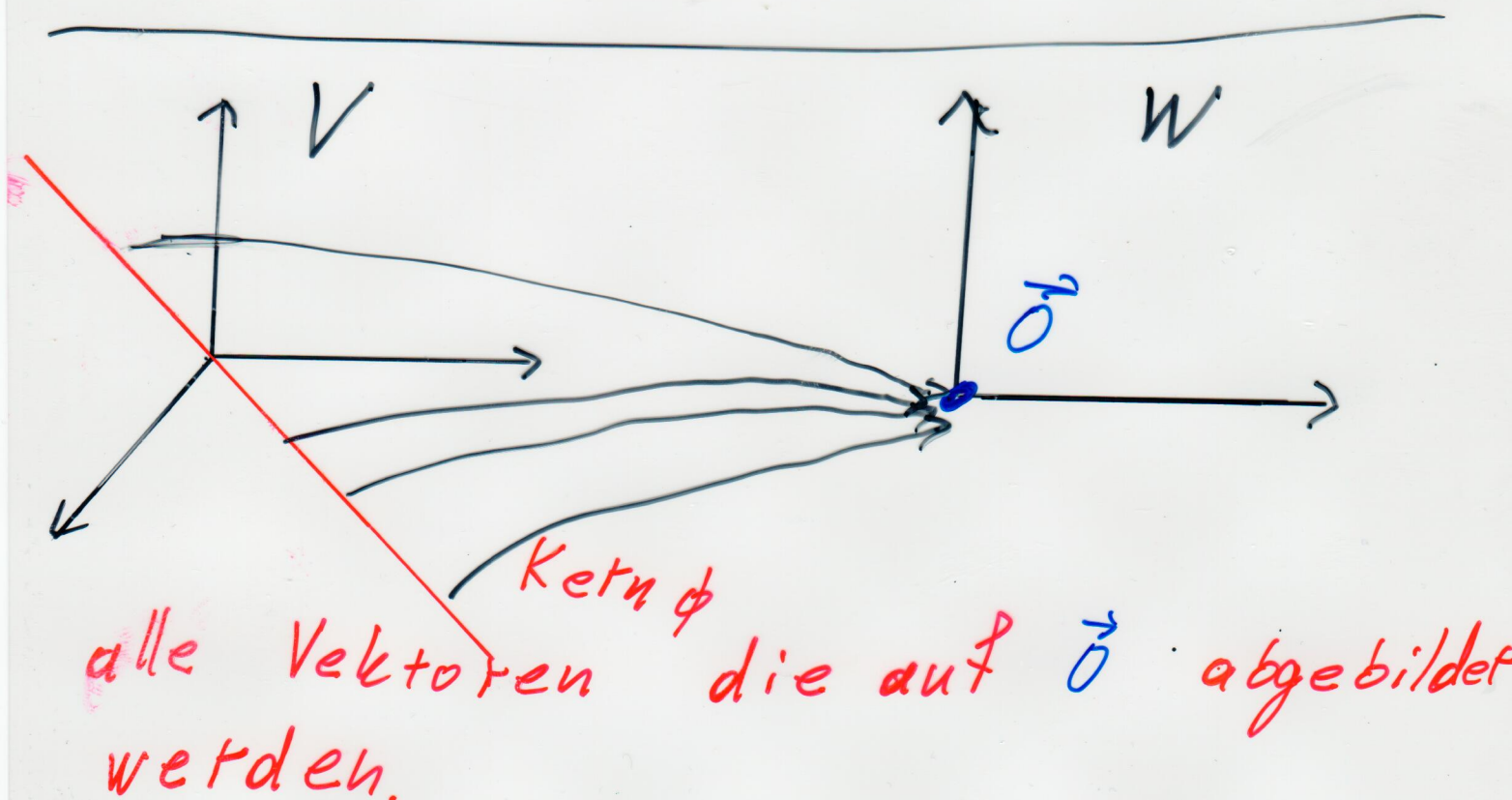
wenn $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \alpha \in K$ gilt

$$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}), \quad \phi(\alpha \vec{x}) = \alpha \phi(\vec{x}).$$

In diesem Fall definieren wir

$$\text{Kern } \phi = \{ \vec{x} \in V : \phi(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

$$\text{Bild } \phi = \{ \phi(\vec{x}) : \vec{x} \in V \}.$$



Bsp 13.11.1 (i) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\phi(x) = 5x$. Dann ϕ ist linear da

$$\phi(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = \phi(x_1) + \phi(x_2)$$

und $\phi(\alpha x) = 5(\alpha x) = \alpha 5x = \alpha \phi(x)$.

$\ker \phi = \{0\}$ weil $5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$\text{Bild } \phi = \mathbb{R}$.

(ii) $\psi(x) = 3x + 2$ nicht linear

weil $\psi(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

$$\psi(1) = 5, \quad \psi(2) = 8.$$

Also $11 = \psi(1+2) \neq \psi(1) + \psi(2) = 13$.

Bsp 13.11.2 $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit.

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 12x_4, 1x_2 + 2x_3 + 3x_4, 1x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 12x_4)$$

Dann

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} \quad \quad \quad A \quad \quad \quad \vec{x}$

Also $\phi(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$. Deshalb

$$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$$

ähnlich $\phi(\alpha \vec{x}) = \alpha \phi(\vec{x})$. Also ist ϕ linear.

$$\text{Kern } \phi = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \phi(\vec{x}) = \vec{0} \} =$$

$$= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Kern } A$$

Bsp 13.24

$$\text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

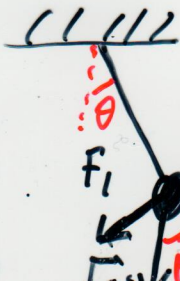
$$\text{Bild } \phi = \{ \phi(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \} = \{ A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \text{Bild } A \quad \text{Bsp 13.26} \quad \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Warum lineare Abbildungen?

- (i) Sie sind einfach.
- (ii) Sie approximieren komplizierte Abbildungen

Wenn θ klein



$$F_1 = F \sin \theta$$

lineare Approximation von F

$$\approx F \theta$$

lineare Approximation

Satz 13.3. (1) Seien V, W K Vektorräume
und $\phi: V \rightarrow W$ linear. Dann

$\text{Kern } \phi$ [bzw. Bild ϕ] ist Unterraum
von V [bzw. W].

(2) ϕ ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern } \phi = \{\vec{0}\}$

Beweis von (2): " $\Rightarrow$ " Ist $\phi(\vec{x}) = \vec{0}$

lsg dann $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{0}) \xrightarrow{\phi \text{ injektiv}} \vec{x} = \vec{0}$

($\phi(\vec{0}) = \vec{0}$ weil $\phi(\vec{0}) = \phi(\vec{0} + \vec{0}) = \phi(\vec{0}) + \phi(\vec{0})$)

$\Rightarrow \phi(\vec{0}) = 2\phi(\vec{0}) \Rightarrow \phi(\vec{0}) = \vec{0}$.

" $\Leftarrow$ " Ist $\phi(\vec{x}_1) = \phi(\vec{x}_2)$ z.z. $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

$\Downarrow$
 $\phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) = \vec{0} \xrightarrow{\phi \text{ linear}} \phi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \text{Kern } \phi \Rightarrow$

$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}), \forall \vec{y} \in \text{Kern } \phi$