Maximum / Minimum stetiger Funktionen

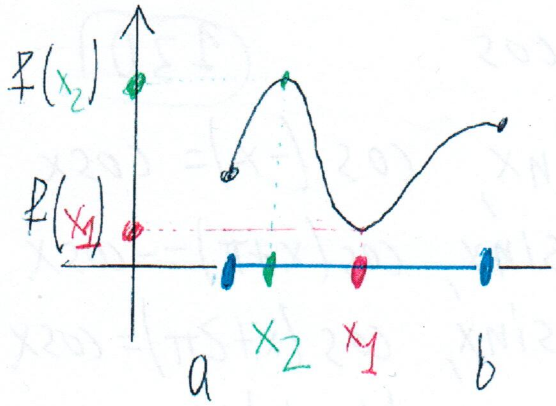
Satz 9.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

$\exists$ $x_1, x_2 \in [a,b]$, so dass

$$\underbrace{f(x_1)}_{\text{Minimum}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\text{Maximum}}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Insbesondere ist $f([a,b])$ beschränkt.

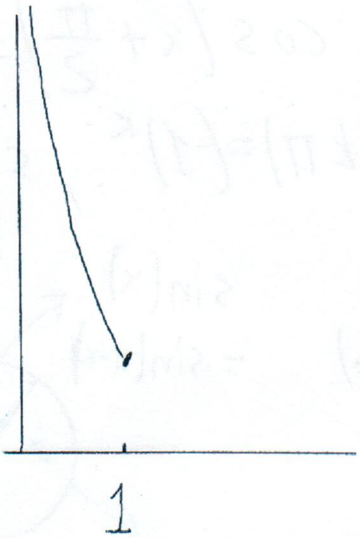
Beweis: Zusatzaufgabe des Tutorium der nächsten Woche.



Sehr wichtig:

$[a,b]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Wenn nicht muss die Funktion kein Maximum/Minimum haben

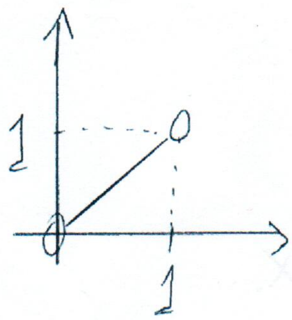
Beispiel 9.13



$g: (0,1] \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x}$.

g ist stetig aber hat kein Maximum und eigentlich ist $g((0,1])$ nicht beschränkt.

$h: (0,1) \to \mathbb{R} \quad h(x) = x$.



h ist beschränkt* und stetig, hat aber kein Minimum/Maximum.

* (das heißt das Bild $h(0,1)$ von h ist beschränkt).

10 Differentialrechnung

10.1 Differenzierbarkei

I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

$\boxed{\text{Def: } 10.1}$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

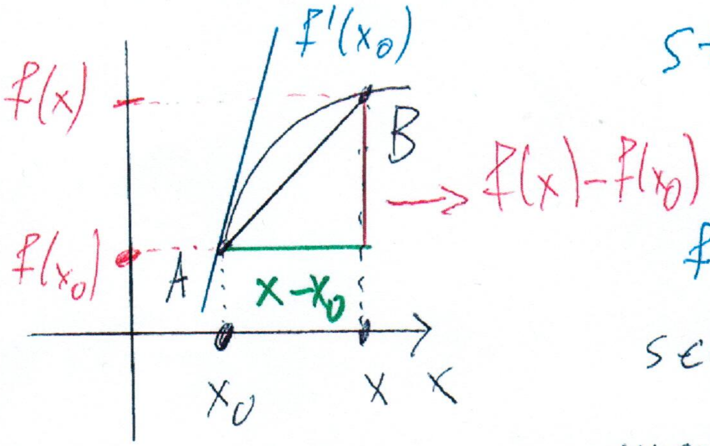
f heißt differentierbar (dbar) in x_0.

Dann $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)$ ↓ Abbleitung von f in x_0

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: Steigung von AB

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: Steigung wenn $x \to x_0$.



$f'(x_0)$ besagt wie schnell f sich ändert wenn x sich in der Nähe von x_0 ändert.

Sehr sehr wichtig: Sei t Zeit und $f(t)$ Ort eines sich bewegenden Punktes auf der Geraden der reellen Zahlen. Dann $f'(t_0) \xrightarrow{\text{ist}}$ Geschwindigkeit in t_0.

Bem 10.1 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\substack{h \to 0 \\ x = x_0+h}}{\overset{h = x - x_0,\ \text{dann}}{=\!=\!=}} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$

Satz 10.1 f dbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0.

Beweis: $$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow\, 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Erweiterung.

Def 10.1 f dbar $\Leftrightarrow$ f dbar in x, $\forall x \in I$

Bsp 10.1.1: (i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \neq x_0$.

gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \underset{\text{Auf 12b}}{\overset{\text{Übungsblatt 3}}{=\!=\!=}} \frac{(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x-x_0}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot x_0^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n\, x_0^{n-1}.$$

Allgemein gilt $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$, dann $f'(x_0) = a x^{a-1}$

(ii) $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad \underbrace{|e^h - 1 - h| \leq \frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}_{\text{Eigenschaft (12) der Exponentialreihe.}}$ (*)

$$\Rightarrow \left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \frac{|h|}{2} e^{|h|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (1)$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \underset{(1)}{\xrightarrow{h \to 0}} e^{x_0}.$$

Also $(e^x)' = e^x$, ferner $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

10.2 Ableitungsregeln

Satz 10.2 (Teil 1). Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 dbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0). \quad \text{(Produktregel)}$$

$$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{(Quotientenregel).}$$

man schreibt auch.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beispiel 10.2.1.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

Aber $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

$$= \frac{(\cos x)^2 - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Satz 10.2 Teil 2.

Kettenregel: $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

"Beweis" $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{\to\, g'(f(x_0))} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to\, f'(x_0)}$$

Man schreibt auch

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Bsp 10.2.2 $(\tan x)^{\frac{1}{3}} = f(g(x))$

wobei $g(x) = \tan x$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

(In der Tat $f(g(x)) = f(\tan x) = (\tan x)^{\frac{1}{3}}$)

$((\tan x)^{\frac{1}{3}})' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$.

Aber $g'(x) = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$.

$\Rightarrow f'(g(x)) = f'(\tan x) = \dfrac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$

$$\left((\tan x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Produktregel. Beweis:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

Bsp 10.1.3 $f(x)=|x|$ ist in 0 nicht d.bar.

da $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{x} = 1$

und $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x} = -1$ $\Rightarrow$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert nicht

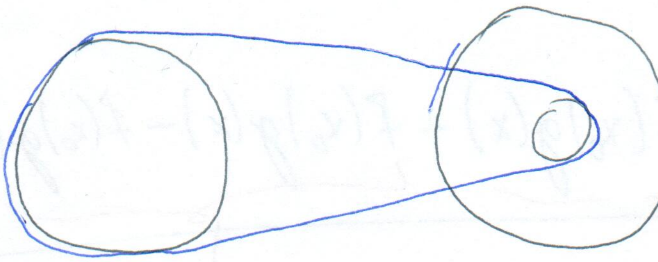
Illustration der Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Änderungsrate von $f \circ g$ bzg x

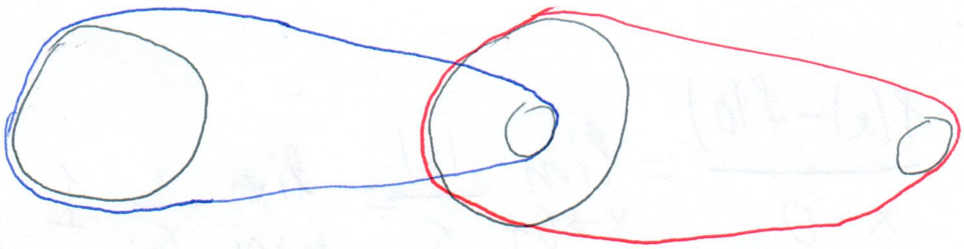
Änderungsrate von f bzg g

Änderungsrate von g bzg x.



1 Rotation $\Rightarrow$ 4 Rotationen

1 Rotation $\Rightarrow$ 5 Rotationen



1 Rotation $\Longrightarrow$ $4 \cdot 5 = 20$ Rotationen

Bsp 10.2.3 Ist $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, dann.

$$(\cosh x)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}(-x)'}{2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Ähnlich $(\sinh x)' = \cosh x$.