

13.14 Lineare Abbildungen als Matrizen

Bsp 13.14.1 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

mit $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$. Sei

$B = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3) \rightarrow$ Basis von $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \rightarrow$ Basis von $\mathbb{R}^2$.

${}_C[\phi]_B \rightarrow$ Matrix von ϕ bzgl. B, C .

$$\phi(\vec{c}_1) = \phi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{c}_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{c}_3) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$${}_C[\phi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ bekommen wir

$$\phi(2\vec{c}_1 + 1\vec{c}_2 + 0\vec{c}_3) = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sei $\phi: V \rightarrow W$ linear
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} = B$ Basis von V $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ Basis von W . Dann

gibt es ${}_C[\phi]_B$ (Matrix von ϕ bzg. der Basen B, C) mit

$${}_C[\phi]_B \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\phi(a_1\vec{b}_1 + \dots + a_n\vec{b}_n) = d_1\vec{c}_1 + \dots + d_n\vec{c}_n$$

Seien $\phi: V \rightarrow W$, $\psi: W \rightarrow Z$
 lineare Abbildungen und
 A, B, C Basen der K -Vektorräume
 V, W, Z .

Satz 13.5: ${}_C[\psi]_B {}_B[\phi]_A = {}_C[\psi \circ \phi]_A$

$\psi \circ \phi: V \rightarrow Z$

Bsp 13.14.2. Seien ϕ, B, C wie
 im Bsp 13.14.1

$D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$

Sei $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto \vec{x}$

Bestimmen Sie ${}_D[\text{id}]_C$ und

${}_D[\phi]_B$.

$$\text{Id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2a + b = 1$$

$$2a + b = 1$$

$$a - 2b = 1 \Rightarrow$$

$$2a - 4b = 2$$

0

$$5b = -1 \Rightarrow$$

$$b = -\frac{1}{5}$$

$$2a + b = 1 \Rightarrow$$

$$2a = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$a = \frac{3}{5}$$

$$\text{Also } \text{Id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ähnlich } \text{Id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } {}_D[\text{Id}]_C = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

siehe
Bsp 13.
14.1.

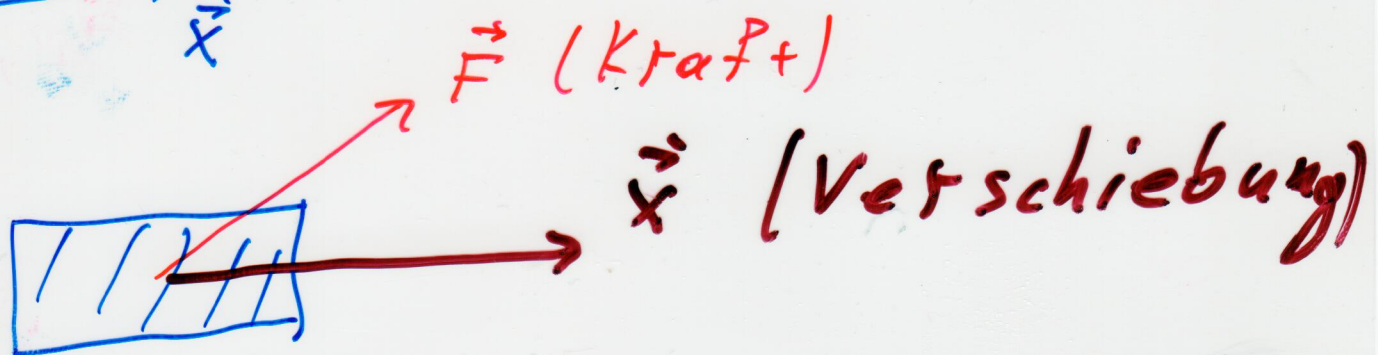
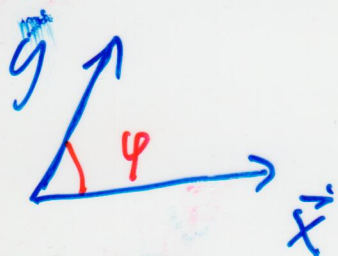
$${}_D[\phi]_B \stackrel{\text{Satz 13.5}}{=} {}_D[\text{Id} \circ \phi]_B$$

$$= {}_D[\text{Id}]_C {}_C[\phi]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukte (14). Für zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ definiert mit

$$(\vec{x} | \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi.$$

↓
Länge von $\vec{x}$.



$$A = \vec{F} \cdot \vec{x}$$



Arbeit

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dann

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\vec{x}\|^2$$

Also $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$

Skalarprodukt in $V = K^n$

Ist $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Dann

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := (\vec{x} | \vec{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Also wenn die Vektoren komplexwertig sind "konjugieren" wir die Komponenten von $\vec{y}$. Es gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

$$= \underbrace{\|\vec{x}\|^2}_{\text{Länge von } \vec{x}}.$$

14.2 Eigenschaften

$$(1) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in K^n \text{ gilt } (\vec{x} | \vec{y}) = \overline{(\vec{y} | \vec{x})}.$$

$$(2) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in K^n, \forall \alpha \in K \text{ gilt}$$

$$(\alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z}) = \alpha (\vec{x} | \vec{z}) + (\vec{y} | \vec{z}).$$

$$(3) \quad \forall \vec{x} \in K^n \setminus \{0\} \text{ gilt } (\vec{x} | \vec{x}) > 0.$$