10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Taylorsatz: • Gibt Methode für den Computer Funktionen zu berechnen mit kleinem Fehler.

• $f(x)=e^x$, $[f(x+y)=f(x)f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R} \wedge (f'(0)=1)]$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

ähnlich sind sin, cos wie in der Schule dann

Taylorsatz $\Rightarrow$ $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (2), $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}}$.

• Ist $|x|\leq\frac{\pi}{36}$ (5 Grad) dann $\sin x\approx x$.

Heute: $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall $f: I\to\mathbb{R}$ dbar (differentierbar).

Def 10.3 Ist $x_0\in I$, heißt f zwei Mal dbar in x_0, falls f' dbar in x_0 ist. Dann $f''(x_0):=(f')'(x_0) \rightsquigarrow$ zweite Ableitung von f in x_0.

Ähnlich definiert man $f^{(n)}(x_0)$ n-te Ableitung von f in x_0.

Def 10.4 $f\in C^n(I) \Leftrightarrow f$ ist n-Mal dbar und $f^{(n)}$ ist stetig. ("f ist n-Mal stetig dbar").

Bsp 10.4.1 $I=[0,\infty)$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Dann $f\in C^1(I)$

und $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$. Aber $f \notin C^2(I)$ da

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}{x} = \infty.$$

$f \in C^\infty(I) \iff f \in C^n(I) \ \forall n \in \mathbb{N}$ (z.B $f(x) = e^x$ ist in $C^\infty(I)$.

<u>Bsp 10.4.2</u> Sei $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $\boxed{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $f \in C^n([0,2])$, $f^{(n)}$ dbar

Ist $0 = f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)$, $f(2) = 0$ dann gibt es $c \in (0,2)$ mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

<u>Lösung</u>: Induktion: $n = 0$ $(f^{(0)} := f)$. Dann

$$f(0) = 0,\ f(2) = 0 \xRightarrow{\text{Mittelwertsatz}} \exists c \in (0,2): f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

Also stimmt die Aussage für $n = 0$.

<u>Induktionsannahme</u>: Stimmt die Aussage für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Z.z $f \in C^{n+1}([0,2])$ $f^{(n+1)}$ dbar

$$\boxed{0 = f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)} = f^{(n+1)}(0), \quad \boxed{f(2) = 0.}$$

wegen Induktionsannahme.

$$\exists\ d \in (0,2): f^{(n+1)}(d) = 0$$

Da aber $f^{(n+1)}$ dbar $\Rightarrow \exists c \in (0,d) \subseteq (0,2)$:

$$\left(f^{(n+1)}\right)'(c) = \frac{f^{(n+1)}(d) - f^{(n+1)}(0)}{d - 0} = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(c) = 0$$

was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

Taylorsatz überlegungen. Sei f eine Funktion (z.B $f(x) = e^x$). Gibt es $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ mit $f(x) \approx p(x)$ nah bei 0?

Beobachtung: $p(0) = a_0 = 0! a_0$ (1)

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \Rightarrow p'(0) = a_1 = 1! a_1$. (2)

$p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x \Rightarrow p''(0) = 2a_2 = 2! a_2$. (3)

$p'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 \Longrightarrow p'''(0) = p^{(3)}(0) = 3! a_3$ (4)

Für $f(x) \approx p(x)$ nah bei 0 angemessen wäre zu verlangen.

$$\begin{cases} f(0) = p(0) \\ f'(0) = p'(0) \\ f''(0) = p''(0) \\ f'''(0) = p'''(0). \end{cases} \xrightarrow[(3),(4)]{(1),(2)} \quad a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Also $f(x) = e^x \Rightarrow p(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

Allgemein ist $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ und $f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ dann.

$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

Insbesondere ist $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - a_{n+1} x^{n+1}$ $(*)$

Siehe letzte Seite

dann $g^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$.

Satz 10.6 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f \in C^n(I)$, $f^{(n)}$ auf I dbar. Sind $x_0, x \in I \Rightarrow \exists c$ zwischen x_0, x:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Echte Funktion allgemein vom Computer nicht berechenbar}}}{f(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{n-tes Taylorpolynom um } T_n(f; x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{n-tes Restglied } R_n(f; x_0)(x)}$$

Echte Funktion allgemein vom Computer nicht berechenbar

n-tes Taylorpolynom um $T_n(f; x_0)(x)$
$\downarrow$
Approximation von f vom Computer berechenbar.

n-tes Restglied $R_n(f; x_0)(x)$
Fehler der Approximation

Wenn $f \in C^\infty(I)$ und $\lim_{n \to \infty} R_n(f; \;)(x) = 0 \; \forall x \in I$

dann $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{Taylorreihe von } f \text{ um } x_0} = \lim_{n \to \infty} T_n(f, x_0)(x)$

Für $n = 0$ bekommen wir

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x - x_0) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mittelwertsatz

Beweis für $x_0 = 0$, $x = 2$.: z.z $\exists\, c \in (0,2)$ mit

$$f(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 2^{n+1} \quad (**)$$

Sei $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{m x^{n+1}}{(n+1)!}$

wobei m so gewählt wird, dass $g(2) = 0$.

Aus $(*)$ folgt: $g^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k = 0, \dots, n$.

Also aus Bsp $\exists\, c \in (0,2)$ mit $g^{(n+1)}(c) = 0$.

$\Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = m$. Also

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Da aber $g(2) = 0$, Also $(**)$ folgt

Sei $f \in C^n(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $0 \in I$.

Sei $g(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m - a_{n+1} x^{n+1}$.

Dann $g(0), g'(0), \ldots, g^{(n)}(0), g^{(n+1)}(0)$.

(i) sind alle Null.

(ii) sind alle Null bis auf $g^{(n+1)}(0)$ ✓
was nicht unbedingt Null sein muss

(iii) $g(0)=0$ aber für den Rest ist es unklar.

(iv) keine der obigen Antworten

(v) keine Ahnung.

Erklärung. Ist $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1}$.

Dann $p^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad \forall k = 0, \ldots, n, n+1$.

Ist also $\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$ dann $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

Also $\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m + a_{n+1} x^{n+1} \right)^{(k)} (0) = f^{(k)}(0)$

$\forall k = 0, \ldots, n$.

Also $g^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, n$.

$g^{(n+1)}(0)$ hängt von a_{n+1} ab.