Beweis für $x_0 = 0$, $x = 2$.: z.z. $\exists\, c \in (0,2)$ mit

$$f(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 2^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 2^{n+1} \quad (**)$$

Sei $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{m x^{n+1}}{(n+1)!}$

wobei m so gewählt wird, dass $g(2) = 0$.

Aus $(*)$ folgt: $g^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k = 0, \dots, n$.

Also aus Bsp $\exists\, c \in (0,2)$ mit $g^{(n+1)}(c) = 0$.

$$\Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = m. \text{ Also}$$

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Da aber $g(2) = 0$, Also $(**)$ folgt

Bsp 10.4.3 Sei $f(x) = \sin x$. Mit Hilfe des 4-ten Taylorpolynoms $T_4(f;0)$ approximieren Sie $f(0{,}3)$ mit der Hand. Schätzen Sie den Fehler Ihrer Berechnung ab.

Lösung: $T_4(f;0)(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$f^{(0)}(0) = \sin 0 = 0$ $\qquad f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$ $\qquad f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

Also $T_4(f,0)(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 = x - \frac{x^3}{3!}$.

$\Rightarrow T_4(f,0)(0{,}3) = 0{,}3 - \frac{0{,}3^3}{3!} = 0{,}3 - 0{,}0045$

$= 0{,}2955$

Fehler $= |R_4(f,0)(0{,}3)| = \left| \frac{f^{(5)}(c)}{5!} (0{,}3)^5 \right|$

$c \in (0, 0{,}3)$. Aber $f^{(5)}(x) = \cos x$.

$\Rightarrow |R_4(f,0)(0{,}3)| = \left| \frac{\cos(c)}{5!} (0{,}3)^5 \right| \xRightarrow{|\cos(c)| \le 1}$

$|R_4(f,0)(0{,}3)| \le \frac{3^5 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{3^4}{40} \cdot 10^{-5} = \frac{81}{40} \cdot 10^{-5} = 2{,}025 \cdot 10^{-5}$

Also $\underbrace{0{,}2955 - 2{,}025 \cdot 10^{-5}}_{= 0{,}29547975} \le \sin 0{,}3 \le \underbrace{0{,}2955 + 2{,}025 \cdot 10^{-5}}_{= 0{,}29552025}$

Bsp 10.4.4 $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x - \cos c \frac{x^3}{3!}}{x} - 1 \right| = |\cos c| \frac{x^2}{3!} \le \frac{x^2}{3!}$.

Also $x \le \frac{\pi}{36} \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{36} \right)^2 \le ~~0.00127~~$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \ge 0.99873 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \le 1.00128 \Longrightarrow \frac{x - \sin x}{\sin x} \le 0.0012$

Bsp 10.4.4 Ist $|x| \le \frac{\pi}{15}$ (12 Grad.)

dann $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \le \frac{1}{100}$

Ähnlich wie im Vorherigen Beispiel haben wir.

$$f(x) = \sin x = x - \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cancel{x}^3 = x - \frac{\cos c}{3!}x^3$$

Also $$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{x - \frac{\cos c}{3!}x^3}{x} - 1\right|$$

$$= \frac{|\cos c|}{3!}\frac{|x|^3}{|x|} \le \frac{|x|^2}{3!} \le \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{15}\right)^2$$

$$\le \frac{1}{6}\left(\frac{3{,}15}{1{,}5}\right)^2 \cdot 10^{-2} \le \frac{2{,}1^2}{6} \cdot 10^{-2}$$

$$\le \frac{1}{100}$$

Bsp 10.4.5: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Dann $f^{(n)}(x) = e^x$ (8)

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (9)

Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists\ \xi$ zwischen $0, x$ mit

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\overset{(8),(9)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

ξ zwischen $0, x \Rightarrow |\xi| < |x| \Rightarrow e^{\xi} < e^{|x|}$.

Also $$\left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \underbrace{e^{|x|}}_{\text{unabhängig von } n} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ konvergiert (Quotientenkriterium)

Also $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Insbesondere

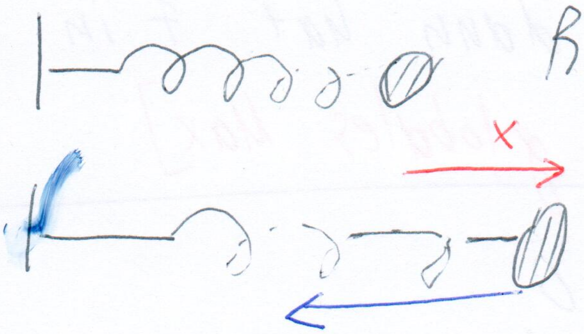
$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < 3$$

Ist $a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ dann $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}$

$= \frac{|x|}{n+2} \to 0 < 1$. Also nach Quot. krit. die konvergiert Reihe

Anwendung des Taylorsatzes:

Das Hookesche Gesetz.



Ruhelage

x (Verschiebung).

F (Kraft)

$$\boxed{F = -k x.}$$

Hookesche Konstante

F: Warum wird in der Physik gesagt, dass das Hookesche Gesetz stimmt wenn x klein? Kann man mit dem Satz von Taylor sehen: Ist $F = F(x)$ 2-Mal stetig. dbar dann $\exists\, c$ zwischen $0, x$

$$F = \underbrace{F(0)}_{=0} + \underbrace{F'(0)}_{-k} x + \frac{F''(c)}{2!} x^2.$$

Kraft der Ruhelage

Also $F = -k x + \frac{F''(c)}{2!} x^2.$

Ist x klein genug dann $\left| \frac{F''(c)}{2!} x^2 \right| \ll |k x|$

und deshalb $F(x) \simeq -k x.$

Satz 10.7 (Folgerung des Taylorsatzes).

Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I (z.B. wenn $I = [0,1]$ dann $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$). Sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (1) \quad \text{und}$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ $[f^{(n)}(x_0) < 0]$ dann hat f in x_0 lokales Minimum [Maximum].

(b) Ist n ungerade, dann hat f kein lokales Extremum in x_0.

Beweis: Fall $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) > 0$ (Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist ähnlich).

Aus dem Taylorsatz folgt

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\substack{=0 \\ \text{wegen (1)}}} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n \quad \left(\begin{array}{c}\text{für ein} \\ \xi \text{ zwischen} \\ x, x_0\end{array}\right)$$

$$\text{Also } f(x) - f(0) = \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>0} \underbrace{x^n}_{\substack{\geq 0 \\ \text{wenn} \\ n \text{ gerade}}} \geq 0 \quad \text{wenn } n \text{ gerade}$$

Da ξ nah bei 0 und $f^{(n)}(0) > 0$.

Also $f(x) \geq f(0)$ wenn x nah bei 0 $\Rightarrow$ lokales Minimum.