

Sei V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow K$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \forall x, y \in V: (x|y) = \overline{(y|x)}.$$

$$(2) \quad \forall x, y, z \in V, \alpha \in K: (\alpha x + y|z) = \alpha (x|z) + (y|z).$$

$$(3) \quad \forall x \in V \setminus \{0\}: (x|x) > 0$$

heißt ein Skalarprodukt auf V .

In diesem Fall kann man definieren

$$\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty) \quad \text{durch} \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

und $\|\cdot\|$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$(N1) \quad \forall v \in V: \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0.$$

$$(N2) \quad \forall v \in V, \alpha \in K: \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|,$$

$$(N3) \quad \forall u, v \in V: \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Eine solche Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ die (N1)-(N3) erfüllt heißt Norm auf V .

Im Rahmen der HMI reicht ein Verständnis
im Fall des Standard Skalarprodukts
 $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$ auf $\mathbb{C}^n$

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

$$\left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right).$$

Bsp 14.2 Sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}, \vec{y}$.

Lösung: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi \Rightarrow \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \cos \varphi.$

Aber $\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2.$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = 2 \quad \text{ähnlich} \quad \|\vec{y}\| = 2.$$

$$\text{Also} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{-2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

14.4 Orthogonalität und Gram-Schmidt Verfahren

Sei V ein K -Vektorraum mit Skalarprodukt

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$$

heißen/
sind/
ist

Orthogonal: wenn
 $i \neq j \Rightarrow (\vec{v}_i | \vec{v}_j) = 0$
Orthonomalsystem **(ONS)**,
wenn dazu $\|\vec{v}_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
Orthonomalbasis **(ONB)** wenn
Orthonomalsystem und
dazu Basis.

Bsp-14.4.1 Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem
Standard Skalarprodukt.

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

(ONB) da

(Basis) + Länge 1

(+ orthogonal zueinander)

→ weil sie linear
unabhängig sind und 3

Die lineare Unabhängigkeit

kann man z.B. mit

Zeilen auf Rangungen überprüfen.

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

orthogonal, aber
kein Orthonomalsystem da

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right)$$

Orthonomalsystem aber
keine **(ONB)**

weil überhaupt
keine Basis.

Satz 14.1 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ orthogonal und nicht Null $\Rightarrow$
dann sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig.

Ist $\vec{v} \in \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ (ONS) $\Rightarrow$
$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n (\vec{v} | \vec{v}_j) \vec{v}_j \quad (1)$$

Beweis von (1): Sei $\vec{v} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{v}_j \quad (3)$

$$\begin{aligned} \text{Dann } (\vec{v} | \vec{v}_e) &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \vec{v}_j | \vec{v}_e \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j (\vec{v}_j | \vec{v}_e) = a_e. \end{aligned}$$

$$= \delta_{je} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j \neq i \\ 0, & \text{wenn } j = i \end{cases}$$

(da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (ONS))

Also $a_j = (\vec{v} | \vec{v}_j) \quad (2) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Aus (2), (3) folgt (1).

lineare Unabhängigkeit: Ist $\vec{v} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{v}_j = \vec{0}$

dann aus (2) folgt $a_j = (\vec{v} | \vec{v}_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$
Also sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig

Bsp 14.4.2 Sei $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die ONB

des Bsp 14.4.1. Dann.

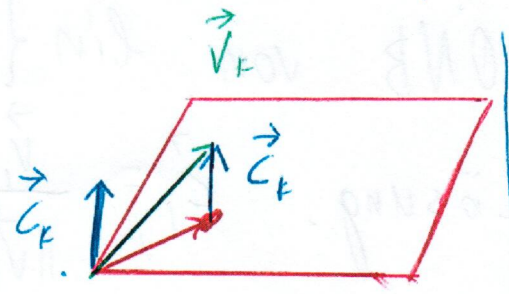
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gram-Schmidt Verfahren.

Sei V ein K -Vektorraum mit Skalarprodukt und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig.

Wir setzen $\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ und für $k=2, \dots, m$

$$\vec{z}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{v}_k | \vec{b}_j) \vec{b}_j$$



die Differenz $\vec{z}_k$ ist orthogonal zu $\text{lin}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1}\}$.
 Projektion von $\vec{v}_k$ auf $\text{lin}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1}\}$.
 $\text{lin}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1}\}$

Dann gilt $\text{lin}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} = \text{lin}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1}\}$
 und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ ist ein Orthonormalsystem.

Wir überprüfen jetzt, dass $\vec{z}_k, \vec{b}_\ell$ orthogonal sind, wenn $\ell < k$.

$$(\vec{z}_k | \vec{b}_\ell) = (\vec{v}_k | \vec{b}_\ell) - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{v}_k | \vec{b}_j) (\vec{b}_j | \vec{b}_\ell)$$

nur $j=\ell$
ist nicht Null

$$= (\vec{v}_k | \vec{b}_\ell) - (\vec{v}_k | \vec{b}_\ell) = 0$$

$$= \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j=\ell \\ 0, & \text{wenn } j \neq \ell \end{cases}$$

Da $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1}$ ONS (Induktionsannahme)