Satz 10.7 (Folgerung des Taylorsatzes).
Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I (z.B. wenn $I=[0,1]$ dann $x_0 \neq 0, x_0 \neq 1$). Sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (1) \text{ und}$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [$f^{(n)}(x_0) < 0$] dann hat f in x_0 lokales Minimum [Maximum].

(b) Ist n ungerade, dann hat f kein lokales Extremum in x_0.

Beweis: Fall $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) > 0$ (Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist ähnlich).

Aus dem Taylorsatz folgt

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\substack{=0 \\ \text{wegen } (1)}} + \frac{f^{n}(\xi)}{n!} x^n \quad \left(\begin{array}{c}\text{für ein} \\ \xi \text{ zwischen} \\ x, x_0\end{array}\right)$$

1

$$\text{Also} \quad f(x) - f(0) = \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{\substack{>0 \\ \text{Da } \xi \text{ nah} \\ \text{bei } 0 \text{ und} \\ f^{(n)}(0)>0.}} \underbrace{x^n}_{\substack{\geq 0 \\ \text{wenn} \\ n \text{ gerade}}} \geq 0$$

wenn n gerade
Also $f(x) \geq f(0)$ wenn x nah bei 0
$\Rightarrow$ lokales Minimum.

Wenn n ungerad hat x^n kein eindeutiges Vorzeichen, deswegen ist $f(0)$ kein lokales Extremum.

<u>Bsp 10.4.6</u> Sei $f(x) = (x^2+1)e^x$

Hat f lokales Extremum in $x=-1$?

<u>Lösung</u>: $f'(x) = (x^2+1)(e^x)' + (x^2+1)' e^x$

$= (x^2+1)e^x + 2xe^x = (x^2+2x+1)e^x$

$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^2 e^x$.

Also $f'(-1) = 0$.

$f''(x) = \left[(x+1)^2\right]' e^x + (x+1)^2 (e^x)' = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x$

$\Rightarrow f''(-1) = 0$.

$f'''(x) = 2e^x + 2(x+1)e^x + 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^{-x}$

$\Rightarrow f'''(-1) = 2e^{-1} \neq 0$. Also

$0 = f'(-1) = f''(-1)$ und $\underbrace{f'''(-1)}_{= f^{(3)}(-1)} \neq 0$

(Die 3-te Ableitung in -1 ist die "erste" Ableitung die nicht 0 ist).

da 3 ungerade ist hat f kein lokales Extremum in $x=-1$. (nach Satz 10.7).

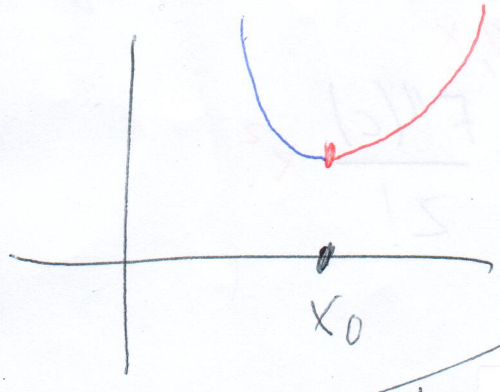
(Bemerkung 10.4). Sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf I [bzw. $f'' \leq 0$ auf I]. Solche Funktionen heiße konvex [bzw konkav]. Ist $x_0 \in I$ und $f'(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 globales Min [bzw. globales Max].

Beweis im Fall $f'' \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'' \geq 0 \quad f' \text{ monoton wachsend} \\ \text{Aber } f'(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\forall x \leq x_0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ monoton fallend wenn $x \leq x_0$

$\forall x \geq x_0 \quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton wachsend wenn $x \geq x_0$



Also ist $f(x_0)$ Minimum.

Bsp 10.4.7 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(x) = e^x - x - 1$. Zeigen Sie: f hat Minimum in 0.

Lösung: $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$.

Aber $f''(x) = e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ deshalb nach Bemerkung 10.4 ist hat f Minimum in 0. Daraus folgt

$f(x) \geq f(0) \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - x - 1 \geq e^0 - 0 - 1 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \geq x + 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$

Regeln von de l'Hospital: Seien f, g dbar

und $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ist $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}"$

oder $"\frac{\pm\infty}{\pm\infty}"$ und ist $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

dann $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Bsp 10.4.8 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = "\frac{0}{0}"$ Da $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Aber $\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

Also nach l'Hospital $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0.$

Beweis von l'Hospital im Fall $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to b} f(x) = f(b) = 0$, $\lim_{x \to b} g(x) = g(b) = 0$, $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $g'(b) \neq 0$.

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \quad (\text{da } f(b) = g(b) = 0)$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}{\frac{g(x) - g(b)}{x - b}} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \left(= \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right).$$

Bsp 10.4.9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \text{"} = \frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Adet $\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ $\Rightarrow$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bsp 10.4.10

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x \text{"} = 0(-\infty)\text{"}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \text{"} = \frac{-\infty}{\infty}\text{"}$$

Abet $\lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0.$$

Erinnerung: sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine reele Potenzreihe.

$R := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ heißt **Konvergenzradius**

$|x-x_0| < R \implies$ Potenzreihe konvergent

$|x-x_0| > R \implies$ Potenzreihe divergent.

Satz 109 | Wenn $|x-x_0| < R$, gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n a_n (x-x_0)^{n-1}}_{\text{Ableitung von } a_n (x-x_0)^n}.$$

Bemerkung: Da $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt.

$$\underbrace{\frac{1}{\limsup \sqrt[n-1]{|n a_n|}}}_{\text{Konvergenzradius der rechten Reihe}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

also hat die neue Reihe den gleichen **Konvergenzradius**.

Da $|x-x_0| < R \implies$ neue Reihe konvergent.

Bsp 10.4.11 Sei $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, wobei $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass $g(x) = \arctan(x)$ auf $(-1,1)$.

Lösung die Potenzreihe hat Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[2k+1]{\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|}} = \limsup \sqrt[2k+1]{2k+1} = 1.$$

Also nach Satz 10.9.

Da $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ wenn $|z|<1$ (geometrische Reihe).

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{\text{Bsp. 10.2.5}}{=\!=} (\arctan(x))'$$

$$\xrightarrow[\text{des Mittelwertsatzes}]{\text{Folgerung (2)}} g(x) = \arctan(x) + C$$

~~Aber~~ Also $\underbrace{g(0)}_{= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = 0} = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + C \Rightarrow C=0$

Also $g(x) = \arctan(x)$ auf $(-1,1)$.