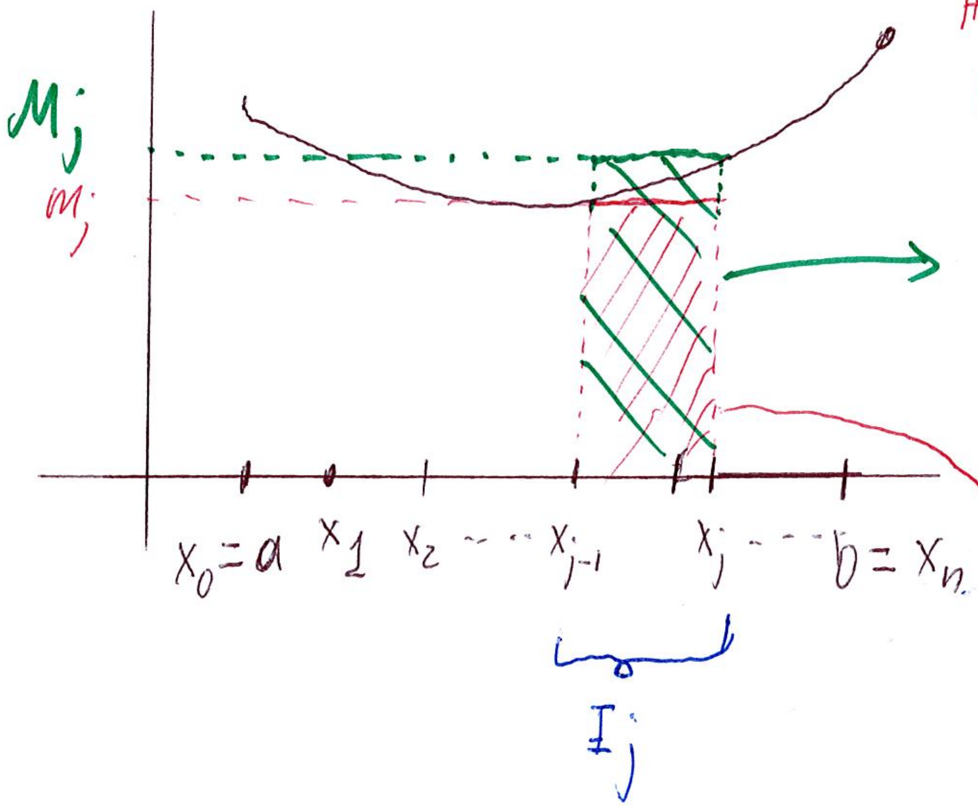
Riemann Integral ("= Flächeninhalt unter dem Graphen)

Im Rest der Vorlesung $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ($f([a,b])$ beschränkt).

$\boxed{\text{Def: 11.1}}$ $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt <u>Zerlegung</u> von $[a,b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Sei Z wie oben, für $j = 1, 2, \dots, n$ sei

$$\underbrace{I_j = [x_{j-1}, x_j]}_{\text{Intervall - Basis des Rechteckes)}}, \quad \underbrace{|I_j| = x_j - x_{j-1}}_{\text{Länge des Intervalls}}, \quad \underbrace{m_j := \inf f(I_j)}_{\substack{\text{Infimum der Funktion im Intervall} \\ \text{Höhe des kleinen Rechteckes}}}, \quad \underbrace{M_j := \sup f(I_j)}_{\substack{\text{Supremum im Intervall } I_j \\ \text{Höhe des großen Rechteckes.}}}$$



Flächeninhalt $M_j \, |I_j|$.

Flächeninhalt $m_j \, |I_j|$.

$s_f(Z) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|}$, heißt <u>Untersumme</u> von f bzgl. Z

Summe der Flächeninhalte der kleinen Rechtecke.

$S_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$, heißt **Obersumme** von f bzgl. Z.

Summe der Flächeninhalte der großen Rechtecke.

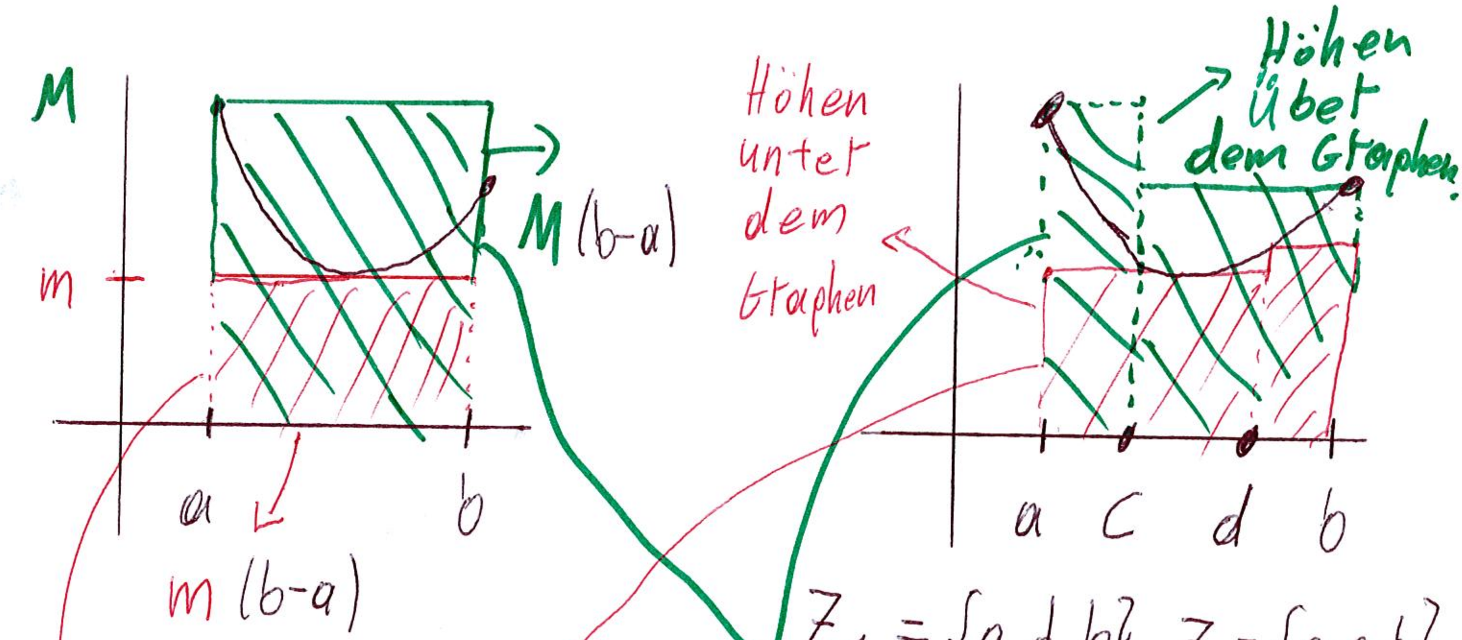
Sei $m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$.

<u>Satz</u> 11.1: Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen. Dann

(1) $m(b-a) \leq s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \leq M(b-a)$.

(2) $Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2) \leq S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$.

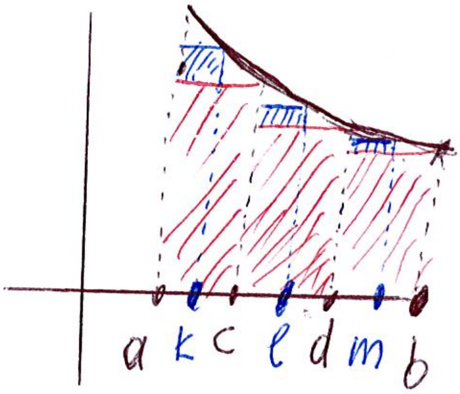
(1)



$Z_1 = \{a, d, b\}$, $Z_2 = \{a, c, b\}$.

$$m(b-a) \leq s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \leq M(b-a)$$

2)



$Z_1 = \{a, c, d, b\}$

$Z_2 = \{a, k, c, l, d, m, b\}$.

$s_f(Z_2)$ hat dazu die blauen Teile. Also $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2)$

Ähnlich $S_f(Z_1) \ge S_f(Z_2)$.

Def 11.2 $s_f := \sup\{ s_f(Z) : Z$ ist Zerlegung von $[a,b]\}$

(unteres Integral von f über $[a,b]$).

$S_f := \inf\{ S_f(Z) : Z$ ist Zerlegung von $[a,b]\}$.

(oberes Integral von f über $[a,b]$).

Aus $s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$ $\forall Z_1, Z_2$ folgt $s_f \le S_f$.

Def 11.3 f heißt (Riemann-)integrierbar in $[a,b]$ falls $s_f = S_f$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f \ (= s_f)$$

das Riemann-Integral von f über $[a,b]$.

Def 11.4 $R[a,b] := \{ g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g$ beschränkt und integrierbar$\}$.

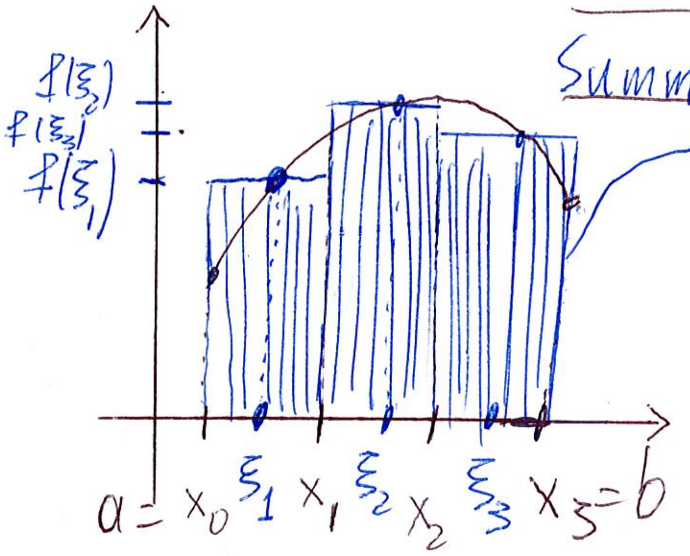
Für eine Zerlegung Z definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j=1,2,\dots,n\} \quad \text{(Feinheit von } Z\text{)}.$$

Seien Zahlen $\xi_1,\dots,\xi_n$ mit $\xi_j \in I_j$, $\forall j=1,2,\dots,n$.

Dann

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|}_{\text{Untersumme}} \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,|I_j|}_{\text{Riemansche Summe}} \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|}_{\text{Obersumme}}.$$



Summe $\sigma_f(Z,\xi)$.

$\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$.

$Z = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

Satz 11.2: Sei $f \in R[a,b]$ und Z_ℓ eine Folge von Zerlegungen mit $\|Z_\ell\| \to 0$ und $\sigma_f(Z_\ell, \xi^{(\ell)})$ eine Folge von Riemanschen Summen. Dann

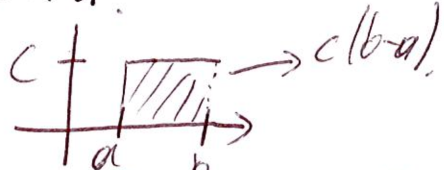
$$\sigma_f(Z_\ell, \xi^{(\ell)}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx.$$

Also die Approximation ist gut wenn die Feinheit klein ist.

11.3 Eigenschaften des Riemann Integrals.

(i) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=c \;\forall x\in[a,b]$ (konstante Funktion) dann $f\in R[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$



(ii). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f\in R[a,b]$.

Beweis von (i). (dieser Beweis wurde weggelassen).

$$\left.\begin{aligned} m &= \inf f([a,b]) = c \\ M &= \sup f([a,b]) = c \end{aligned}\right\}$$

Aber $m(b-a)\le s_f \le S_f \le M(b-a)$ $\Rightarrow$

$s_f = S_f = c(b-a)$. Also $f\in R[a,b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

Seien $f,g\in R[a,b]$, Dann

(1) $f\le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

(2) $f,g\in R[a,b]$. Wenn $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ dann $\alpha f+\beta g\in R[a,b]$ und $\int_a^b(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx+\beta\int g\,dx$.

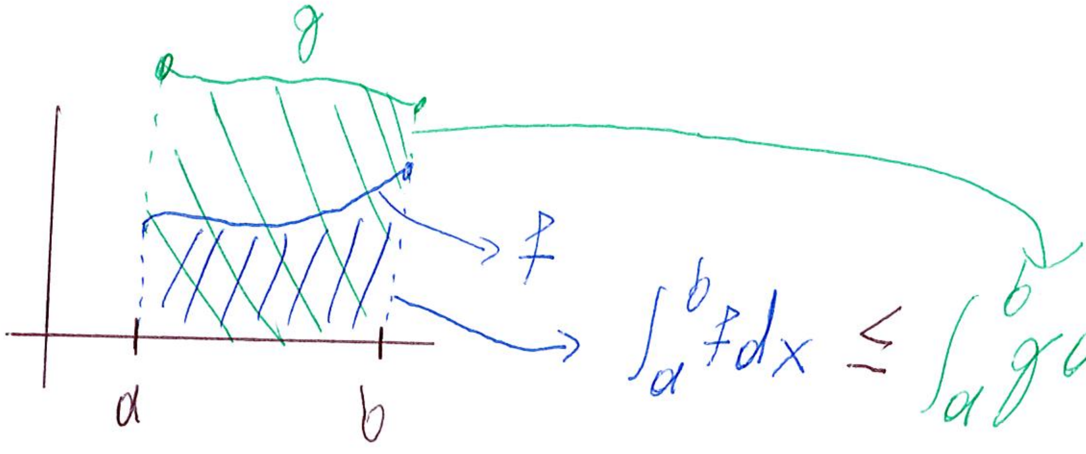
Aber $\int_a^b fg\,dx$ gleich <u>nicht</u> $\int_a^b f\,dx\int_a^b g\,dx$.

(3) $|f|\in R[a,b]$ und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$.

(<u>Dreiecksungleichung für Integrale</u>).

(4) Wenn $a<c<b$ dann $f\in R[a,c]$ und $f\in R[c,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.

(1)



$$\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$$

(3) Beweis von $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$.

Erinnerung $|c| = \max\{c,-c\}\ \forall c\in\mathbb{R}$.

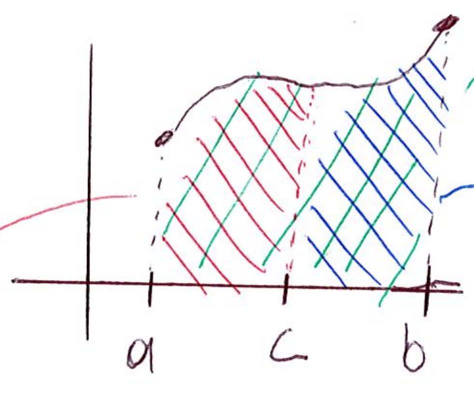
Also $\left|\int_a^b f\,dx\right| = \max\left\{\int_a^b f\,dx, -\int_a^b f\,dx\right\}$.

Aber $f\le|f| \xRightarrow{(1)} \int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$.

$-\int_a^b f\,dx \overset{(2)}{=} \int_a^b -f\,dx$ und $-f\le|f| \xRightarrow{(1)} -\int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx.$$

(4).



$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

$\int_c^b f\,dx$

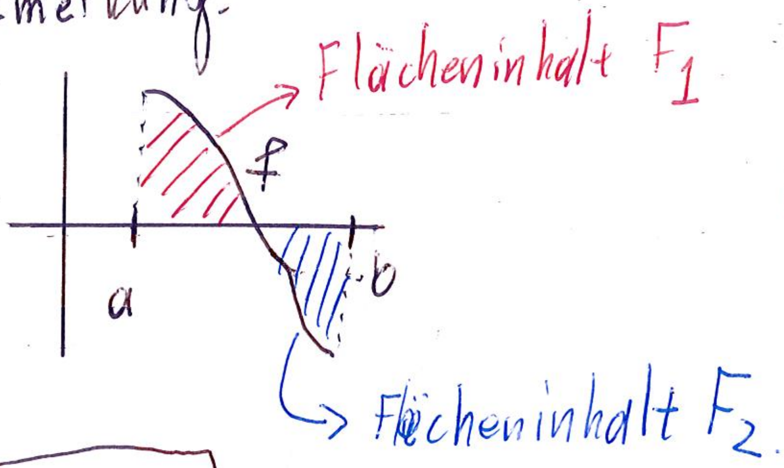
$\int_a^c f\,dx$

Wenn $c < d$ definieren wir

$$\int_c^d f\,dx = -\int_d^c f\,dx.$$

Bem: Es gilt $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$
(egal ob c zwischen a, b ist oder nicht)
im Fall von Existenz der drei Integralle.

Bemerkung:



Sei f wie in der Skizze.
Dann $\int_a^b f\,dx = F_1 - F_2$.

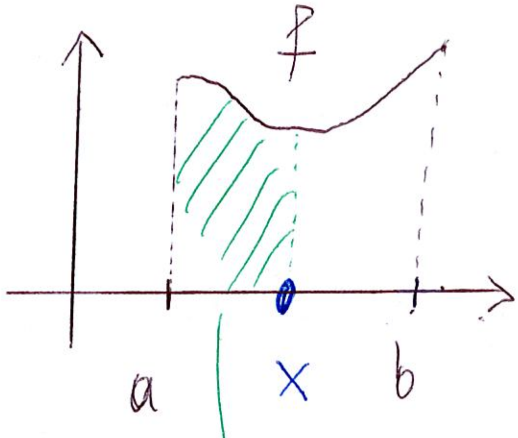
$\boxed{\text{Satz } 11.3}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

(1) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \ \forall x \in [a,b]$.
Dann $F' = f$ auf $[a,b]$.

(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $G' = f$ auf $[a,b]$, dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$ (man schreibt auch $G(x)\big|_a^b$, $[G(x)]_a^b$).



$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi.$$

Physikalische Interpretation Sei x Zeit und $f(\xi)$ Geschwindigkeit eines * Punkts im Moment ξ. Dann $F(x)$ ist Änderung des Orts im Zeit Intervall $[a,x]$. Dann folgt $F' = f$ (Ableitung des Orts ist die Geschwindigkeit).

*sich bewegenden.

Beweis: Wir zeigen erst $(1) \Rightarrow (2)$.

Da $G' = F' (= f) \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ so dass $G = F + c$.

Also $G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) =$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis von (1): Wir zeigen $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = 0$ $\forall x_0 \in [a,b]$

(linkseitiger Limes ähnlich).

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \overset{(4)}{=} \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi}{h} - \frac{h f(x_0)}{h} \right|$$

$$\overset{(i)}{=} \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,d\xi}{h} \right|$$

(* siehe Erklärung nächste Seite)

$$\overset{(2)}{=} \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \left(f(\xi)-f(x_0)\right) d\xi\right|}{h}$$

$$\overset{(3)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \left| f(\xi)-f(x_0)\right| d\xi}{h}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \sup_{\xi'\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi')-f(x_0)\right| d\xi}{h}$$

$$\left(\text{Da } \left|f(\xi)-f(x_0)\right| \leq \sup_{\xi'\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi')-f(x_0)\right| \quad \forall \xi\in[x_0,x_0+h]\right)$$

$$\overset{(i)}{=}_{(**)} \sup_{\xi'\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi')-f(x_0)\right| \xrightarrow{h\to 0+} 0 \quad (***).$$

da f stetig

(Mit grün wurden die Eigenschaften des Riemann Integrals zitiert).

(*) $f(x_0)$ ist konstant also.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,d\xi = f(x_0)\left((x_0+h)-x_0\right) = h\,f(x_0).$$