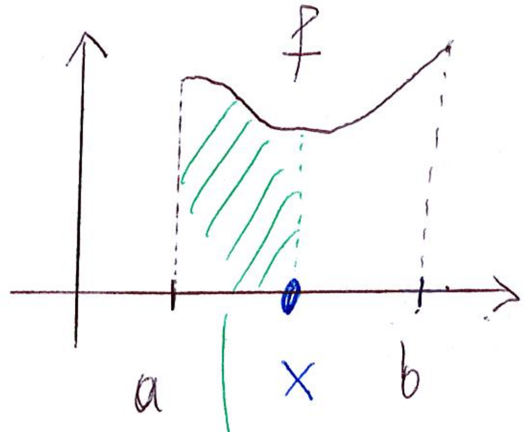


$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi.$$

Physikalische Interpretation Sei x Zeit und $f(\xi)$ Geschwindigkeit eines * Punkts im Moment ξ. Dann $F(x)$ ist Änderung des Orts im Zeit Intervall $[a, x]$. Dann folgt $F' = f$ (Ableitung des Orts ist die Geschwindigkeit).

* sich bewegenden.

Beweis: Wir zeigen erst (1) $\Rightarrow$ (2).

Da $G' = F' (= f) \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ so dass $G = F + c$.

Also $G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) =$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis von (1): Wir zeigen $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = 0$ $\forall x_0 \in [a,b]$

(linkseitiger Limes ähnlich).

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \overset{(4)}{=} \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi}{h} - \frac{h f(x_0)}{h} \right|$$

$$\overset{(i)}{=} \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,d\xi}{h} \right|$$

(* siehe Erklärung nächste Seite)

$$\overset{(2)}{=} \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(\xi)-f(x_0)\big)\,d\xi\right|}{h}$$

$$\overset{(3)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \left|f(\xi)-f(x_0)\right|\,d\xi}{h}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \max\limits_{\xi'\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi')-f(x_0)\right|\,d\xi}{h}$$

(Da $|f(\xi)-f(x_0)| \leq \sup\limits_{\xi'\in[x_0,x_0+h]} |f(\xi')-f(x_0)| \quad \forall \xi\in[x_0,x_0+h]$

$$\underset{(**)}{\overset{(i)}{=}} \max_{\xi\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi)-f(x_0)\right| \xrightarrow{h\to 0+} 0 \quad (***).$$

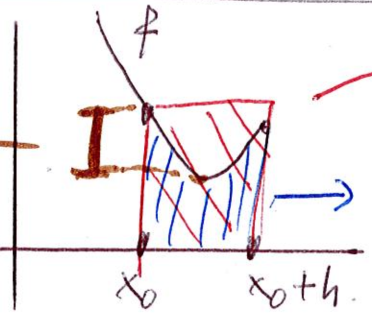
da f stetig

(Mit grün wurden die Eigenschaften des Riemann Integrals zitiert).

(*) $f(x_0)$ ist konstant also.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,d\xi = f(x_0)\big((x_0+h)-x_0\big) = h\,f(x_0).$$

$\max\limits_{\xi\in[x_0,x_0+h]} \left|f(\xi)-f(x_0)\right| \longleftarrow$ I



$\rightarrow h\,f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,d\xi$

$\rightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi$

Sei I Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.
$F: I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ auf I heißt
<u>Stammfunktion</u> von f. Mit
$\int f(x)\,dx$ (unbestimmtes Integral) wird eine Stammfunktion von f gezeichnet.

(2)

Für $a \neq 0$ gilt $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Für $a \neq -1$ gilt $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad \left(\text{in } (-\infty, 0) \text{ oder } (0, \infty)\right).$$

Folgerungen von
$\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta$, $\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta$
(Aufgabe 4, Blatt 4). 7.10.4. Additionstheorem.

$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$, $\quad \cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$

$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$, $\quad \cos^2\varphi = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}$.

$\sin\varphi\cos\theta = \frac{\sin(\varphi+\theta) + \sin(\varphi-\theta)}{2}$ (1)

$\sin\varphi\sin\theta = \frac{\cos(\varphi-\theta) - \cos(\varphi+\theta)}{2}$

$\cos\varphi\cos\theta = \frac{\cos(\varphi-\theta) + \cos(\varphi+\theta)}{2}$

Bsp 11.4.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2}$

da $\sin(-x)=-\sin x$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx.$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(-\underbrace{\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}}_{=0} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \cos 0\right) = -\frac{1}{3}.$

Satz 11.4 Partielle Integration: Sei I Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg' \text{ auf } I \qquad (1)$$

Ist $I=[a,b]$, dann

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \qquad (2).$$

Beweis von (2)

$$(2) \Longleftrightarrow \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

was stimmt wegen des Hauptsatzes da $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)

Also stimmt (2).

Bsp 11.4.2. $\int x e^x dx = \int e^x x \, dx$

$$= \int (e^x)' x \, dx \overset{(1)}{=} e^x \cdot x - \int e^x (x)' dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Bsp 11.4.3 $\int_1^e x \ln x \, dx$.

$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx. \quad (1).$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1^2}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} = \frac{e^2}{2} \quad (2).$$

$$\int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = \underbrace{\int_1^e \frac{\cancel{x}}{2} dx}_{\text{Da } (\ln x)' = \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right). \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Integration durch substitution: [Satz 11.5]

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig

und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$.

Ist $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, dann

(i) $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(ii) $I = [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(b)) - F(u(a))$

folgt aus (i) und dem Hauptsatz.

z.z.

$$F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du.$$

folgt aus $F' = f$ und dem Hauptsatz.

<u>Beweis:</u> (i) $(F(u(x)) + c)' = F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x)$

Kettenregel Da $F' = f$.

Bemerkung:

(ii) $\longrightarrow$ $$\int_a^b \underbrace{f(u(x))}_{f(u)}\ \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du \quad (3)$$

$\frac{du}{dx} = u'(x)$. $u(x)$ ist oft die innere Funktion einer Komposition.

Bsp 11.4.4 $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \underbrace{(x^2+1)}_{u}^{-\frac{3}{2}} \underbrace{x\,dx}_{\frac{du}{2}}$

Sei $u(x) = x^2+1$

$\Rightarrow du = u'(x)dx$

$= 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{2}$

$u(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2+1 = 4$

$u(\sqrt{8}) = (\sqrt{8})^2+1 = 9$

$$\overset{(3)}{=} \int_4^9 u^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{\underbrace{-\frac{3}{2}+1}_{-\frac{1}{2}}} \Bigg|_4^9$$

$$= -u^{-\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = -\left(9^{-\frac{1}{2}} - 4^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

Bsp 11.4.5 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' \arcsin(x)\,dx.$

$$\underset{\text{Integration}}{\overset{\text{Partielle}}{=}} x\arcsin(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \underbrace{(\arcsin(x))'}_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} dx \quad (1)$$

$$x\arcsin(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\pi}{6}} - 0 = \frac{\pi}{12} \quad (2).$$

$\sin x$	y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
x	$\arcsin(y)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{u}}} \overbrace{x\,dx}^{-\frac{du}{2}} = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{du}{2}\right).$$

Sei $u(x) = 1 - x^2$

dann $du = u'(x)\,dx = -2x\,dx$

$$\Rightarrow \quad x\,dx = \frac{du}{-2}$$

$$u(0) = 1 - 0^2 = 1$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^{1} u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2} \left. \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_{\frac{3}{4}}^{1} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx = \frac{\pi}{12} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

12 Uneigentliche Integrale

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, integrierbar über jedes Intervall $[a,b] \subset I$.

(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a<b$, $\alpha<\beta$.

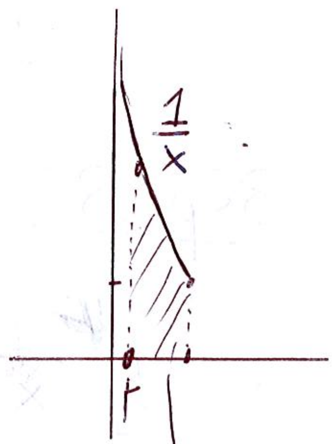
<u>Def</u> Sei $f: [a,\beta) \to \mathbb{R}$ $\left(f: (\alpha, b] \to \mathbb{R}\right)$.
Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)dx$ $\left(\int_\alpha^b f(x)dx\right)$ heißt <u>konvergent</u>, wenn der Limes

$\lim\limits_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)dx$ $\left(\lim\limits_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)dx\right)$ existiert und reel ist. In diesem Fall setzt man.

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx.$$

$$\left(\int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)dx.\right)$$

Ansonsten heißt das Uneigentliche Integral <u>divergent</u>



$\int_r^1 \frac{1}{x}dx$.

$\boxed{\text{Bsp 12.1}}$ $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

$$\int_r^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_r^1 = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln r = -\ln r.$$

Also $\lim\limits_{r\to 0+} \int_r^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{r\to0+}(-\ln r) = +\infty.$

Also ist das uneigentliche Integral divergent.

Bsp 12.2 $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx, \quad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1.$

$$\int_r^1 x^{-\gamma}\,dx = \left.\frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right|_r^1 = \frac{1}{-\gamma+1} - \underbrace{\frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}}_{<0 \text{ wenn } \gamma>1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0+} \int_r^1 x^{-\gamma}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-\gamma+1}, & \gamma < 1 \\ \infty, & \gamma > 1. \end{cases}$$

Da $\lim_{r\to 0+} r^{-\gamma+1} = 0$, wenn $\gamma < 1$

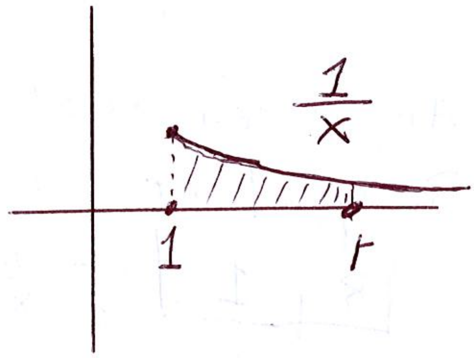
und $\lim_{r\to\infty} r^{-\gamma+1} = \infty$, wenn $\gamma > 1$.

Also $\gamma < 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ konvergent

und $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx = \frac{1}{1-\gamma}$.

$\gamma > 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ divergent.

Bsp 12.3 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist divergent



$$\int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^r = \ln r.$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x}\,dx = \lim_{r\to\infty} \ln r = \infty.$$

Bsp 12.4 $\int_1^\infty x^{-\gamma}\,dx, \quad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1.$

$$\int_1^r x^{-\gamma}\,dx = \left.\frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right|_1^r = \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} - \frac{1}{-\gamma+1}.$$

$$\gamma > 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_1^r x^{-\gamma}\,dx = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Also $\int_1^\infty x^{-\gamma} dx = \frac{1}{\gamma-1}$ (konvergent.

$\gamma < 1 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{r^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = \infty$. Also ist

$\int_1^\infty x^{-\gamma} dx$ divergent.

Zusammenfassung. Sei $\gamma > 0$, dann

$\int_1^\infty x^{-\gamma} dx \left(= \int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx\right)$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\gamma > 1$.

$\int_0^1 x^{-\gamma} dx \left(= \int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx\right)$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\gamma < 1$.