14.7 Orthogonalprojektionen.

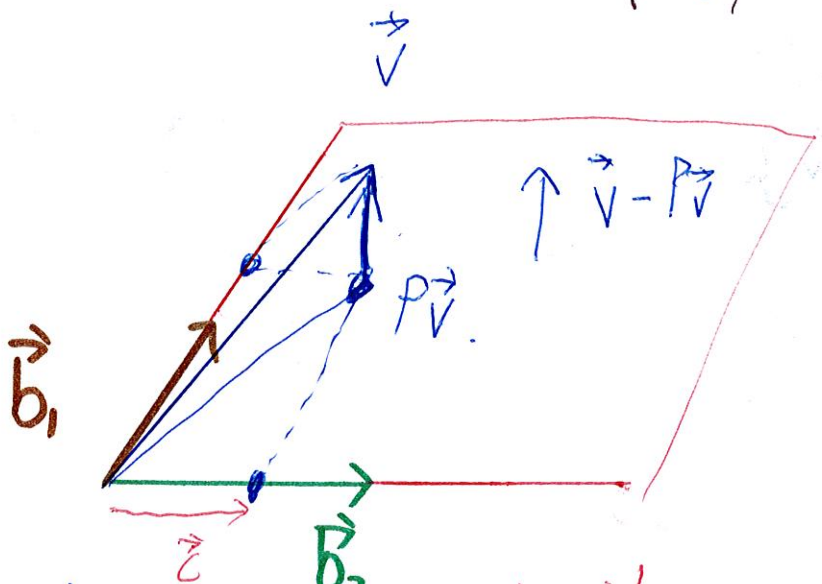
Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ ein Orthonormalsystem in V und $U = \mathrm{lin}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$. Die Abbildung $P: V \to U$ mit

$$P\vec{v} = \sum_{j=1}^{m} (\vec{v} \mid \vec{b}_j)\,\vec{b}_j$$

heißt <u>Orthogonalprojektion</u> von $\vec{v}$ auf U.

Bsp 14.7.1 $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$U = \mathrm{lin}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



U Ebene produziert von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$

$P\vec{v}$ liegt in U und ist der Punkt der Ebene mit der kleinsten Entfernung [illegible] $\vec{v}$.

$$P\vec{v} = \underbrace{\overset{\vec{c}}{\overbrace{(\vec{v}\,|\,\vec{b_1})\,\vec{b_1}}}}_{\text{Orthogonalprojektion von } \vec{v} \text{ auf } \mathrm{lin}\{\vec{b_1}\}} + \underbrace{(\vec{v}\,|\,\vec{b_2})\,\vec{b_2}}_{\text{ähnlich}}.$$

$$= \sqrt{2}\,\vec{b_1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{b_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Da $(\vec{v}\,|\,\vec{b_1}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \sqrt{2}$

ähhlich $(\vec{v}\,|\,\vec{b_2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Das Gramschmidt Verfahren, ersetzt den Vektor $\vec{v}$ durch $\vec{v} - P\vec{v}$.

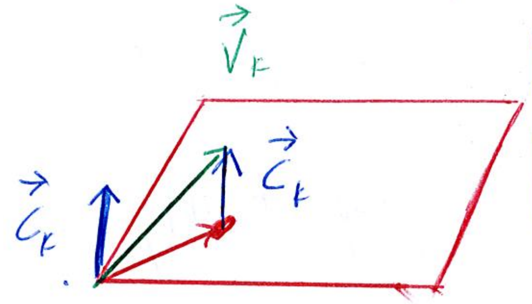
dann $\vec{c}_3 = \vec{v} - P\vec{v}$ ist orthogonal zu $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und dann wenn man $\vec{b}_3 = \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|}$ definiert, bekommt man ein Orthonormalsystem $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

14.4 Gram-Schmidt Verfahren (Wiederholung).

Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt und $\vec v_1, \dots, \vec v_m \in V$ linear unabhängig.

Wir setzen $\vec b_1 = \frac{\vec v_1}{\|\vec v_1\|}$ und für $k = 2, \dots, m$

$$\vec c_k = \vec v_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} (\vec v_k \cdot \vec b_j) \vec b_j}_{\text{Orthogonalprojektion von } \vec v_k \text{ auf } \operatorname{lin}\{\vec b_1, \dots, \vec b_{k-1}\}}.$$



die Differenz $\vec c_k$ ist orthogonal zu $\operatorname{lin}\{\vec b_1, \dots, \vec b_{k-1}\}$.

Orthogonalprojektion von $\vec v_k$ auf $\operatorname{lin}\{\vec b_1, \dots, \vec b_{k-1}\}$.

$\operatorname{lin}\{\vec b_1, \dots, \vec b_{k-1}\}$.

$$\vec b_k = \frac{\vec c_k}{\|\vec c_k\|}$$

Dann gilt $\operatorname{lin}\{\vec v_1, \dots, \vec v_m\} = \operatorname{lin}\{\vec b_1, \dots, \vec b_{k-1}\}$

und $\vec b_1, \dots, \vec b_m$ ist ein Orthonormalsystem.

Wir überprüfen jetzt, dass $\vec c_k, \vec b_\ell$ orthogonal sind, wenn $\ell < k$.

$$(\vec c_k | \vec b_\ell) = (\vec v_k | \vec b_\ell) - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec v_k | \vec b_j) \underbrace{(\vec b_j | \vec b_\ell)}$$

nur $j = \ell$ ist nicht Null

$$= \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = \ell \\ 0, & \text{wenn } j = \ell \end{cases}$$

Da $b_1, \dots, b_{k-1}$ ONS (Induktionsannahme)

$$= (\vec v_k | \vec b_\ell) - (\vec v_k | \vec b_\ell) = 0$$

Bsp 14.4.3 Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine ONB von $V = \text{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

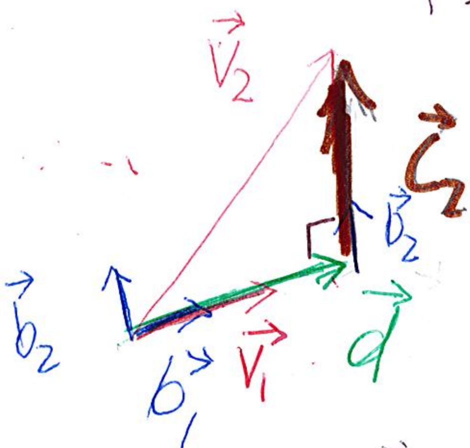
Lösung: Gram-Schmidt Verfahren.

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2 \text{ also } \vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \overbrace{\underbrace{(\vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1)} \vec{b}_1}^{\vec{d}} = \vec{v}_2 - 3\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} = 2$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2} \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$



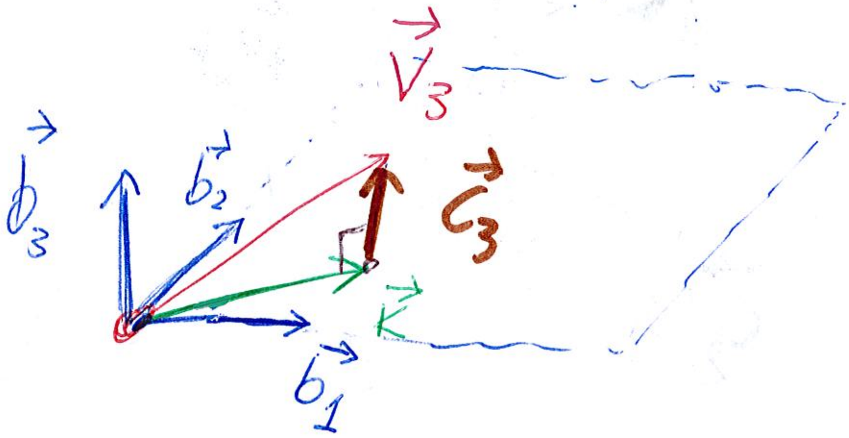
$$\begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - \overbrace{(\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1)}^{\|} \vec{b}_1 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2)\vec{b}_2.$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = 2$$

Also $\vec{c}_3 = \vec{v}_3 \underbrace{- 4\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Also $\vec{b}_3 = \dfrac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$



14.5 Transponierte und adjungierte Matrizen

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$

Dann $A^T = (a_{ji}) \in K^{n \times m}$, $A^* = (\overline{a_{ji}}) \in K^{n \times m}$.

A^T: transponierte Matrix zu A

A^*: adjungierte Matrix zu A.

Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10+2i \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & -2-i & 12 \\ -i & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -i \\ 4 & 5 & -2-i & 6 \\ 10+2i & 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & i \\ 4 & 5 & -2+i & 6 \\ 10-2i & 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Spalten werden Zeilen

(Und die Zeilen werden Spalten)

Dazu konjugieten wir alle Elemente.

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Dann

$$\vec{y}^* \cdot \vec{x} = (\overline{y_1} \cdots \overline{y_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\overline{y_1} + \dots + x_n\overline{y_n} = (\vec{x} \,|\, \vec{y})$$

$(\vec{x} \,|\, \vec{y})$: Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{y}^* \cdot \vec{x} = (\vec{x} \,|\, \vec{y})} \quad (*)$$

Ähnlich, wenn $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\vec{y}^T \cdot \vec{x} = (y_1 \ldots y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = (\vec{x} | \vec{y})$$

(Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$)

heute betrachten wir nur das Standardskalarprodukt

$$\Rightarrow \boxed{\vec{y}^T \cdot \vec{x} = (\vec{x} | \vec{y})} \quad (**).$$

Rechenregeln: (i) Ist AB definiert, dann

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (1).$$

(ii) A invertierbar $\Rightarrow$ A^T, A^* invertierbar und

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = \underbrace{(A^{-1})^*} \quad (2).$$

Beweis von (2) mit Hilfe von (1).

$$A^* (A^{-1})^* \overset{(1)}{=} (A^{-1} A)^* = I^* = I$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Folgerung 14.2: Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) $K = \mathbb{R} \Rightarrow (A^T \vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | A \vec{y}) \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(b) $K = \mathbb{C} \Rightarrow (A^* \vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | A \vec{y}) \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$

Beweis von (a).

$$(A^T\vec{x} \mid \vec{y}) \overset{(**)}{=} \vec{y}^T(A^T\vec{x}) = (\vec{y}^T A^T)\vec{x}$$

$$\overset{(1)}{=} (A\vec{y})^T \cdot \vec{x} \overset{(**)}{=} (\vec{x} \mid A\vec{y}).$$

Erinnerung: Sind A, B invertierbar, dann so ist AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$.

14.6 Orthogonale und Unitäre Matrizen

Def Eine Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ [bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$], heißt orthogonal [bzw. unitär] wenn

$$(A\vec{x} \mid A\vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ [bzw. } \mathbb{C}^n\text{]}.$$

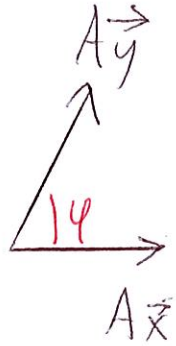
Interpretation (z.B in $\mathbb{R}^3$).

$$(A\vec{x} \mid A\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{x}) \Longrightarrow \|A\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

$$\Longrightarrow \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|. \quad (3)$$

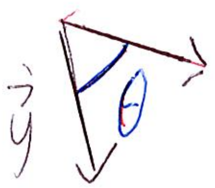
Also ändert A Längen von Vektoren und Abstände nicht.

$$\text{Da} \left.\begin{aligned} (A\vec{x} \mid A\vec{y}) &= \|A\vec{x}\| \, \|A\vec{y}\| \cos\varphi. \\ (\vec{x} \mid \vec{y}) &= \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| \neq 0.]{\text{Wenn}}$$



$\cos\varphi = \cos\theta$

$\Rightarrow \quad \varphi = \theta$. (Da $\varphi, \theta \in [0, \pi]$)



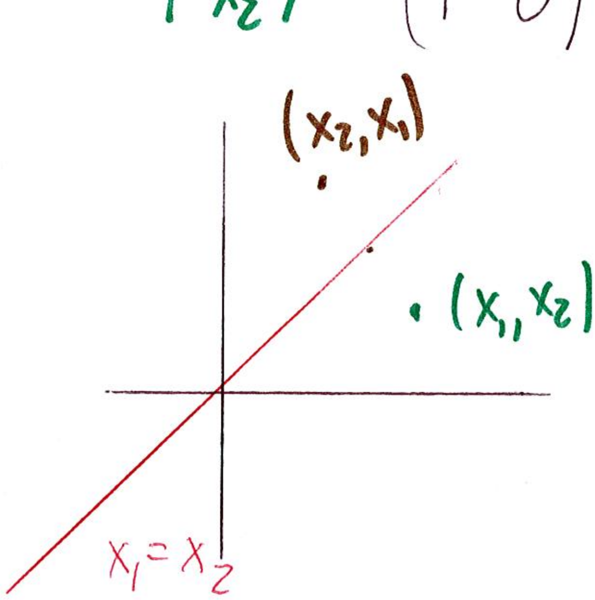
Also ändert A den Winkel der Vektoren nicht.

$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|A\vec{x} - A\vec{y}\|$ (Abstände werden nicht geändert).

Bsp 14.6.1

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$



A ist Reflektion bezüglich der Geraden $x_1 = x_2$.

A ist orthogonal, da.

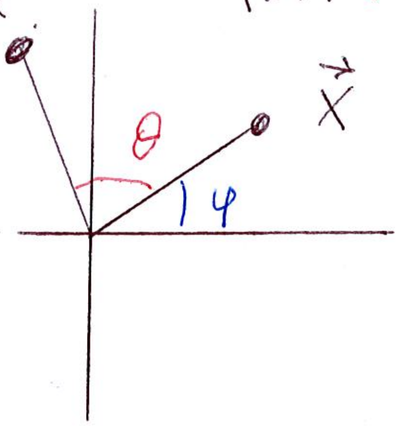
$$\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$x_2 y_2 + x_1 y_1 = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right).$$

Bsp 14.6.2

<u>Bsp 2</u> $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ Rotation um Winkel θ

$A\vec{x}$



$\vec{x}$

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Dann

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$

Produkte, Inverse, transponierte [bzw. konjugierte] von orthogonalen [bzw unitären] Matrizen sind Orthogonal [bzw. unitär].

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ [bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$]

Bem 14.2 Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) A ist Orthogonal [bzw. unitär].

(2) $A^T A = I$ [bzw. $A^* A = I$].

(3) Die Spalten (oder Zeilen) von A

- bilden eine orthonormalbasis (ONB)

in $\mathbb{R}^n$ [bzw $\mathbb{C}^n$].

Bsp 14.63 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ wir zeigen,

dass $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right) = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0.$$

Also bilden $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ eine ONB

von $\mathbb{R}^2$ (weil sie auch 2 sind).

Also ist A orthogonal.

Partieller Beweis vom Bem 14.2. (2) => (1) in $\mathbb{C}^n$.

Sei $A^*A = I$ (1) (Erinnerung $(A^*\vec{x} \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid A\vec{y})$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$).)

$$(A\vec{x} \mid A\vec{y}) = (A^*(A\vec{x}), \vec{y}) \overset{(1)}{=\!=} (\vec{x} \mid \vec{y}).$$

$$\left(\begin{array}{l} (\vec{z} \mid A\vec{y}) = (A^*\vec{z} \mid \vec{y}) \\ \text{wobei } \vec{z} = A\vec{x} \end{array} \right).$$

(2) => (3) wenn $n = 2$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Annahme $A^*A = I$, z.z. $\vec{a}, \vec{b}$ orthonormalbasis.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Annahme}}{\overset{\text{nach}}{=\!=}} A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} & b_1\overline{a_1} + b_2\overline{a_2} \\ a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} & b_1\overline{b_1} + b_2\overline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{a} \mid \vec{a}) & (\vec{b} \mid \vec{a}) \\ (\vec{a} \mid \vec{b}) & (\vec{b} \mid \vec{b}) \end{pmatrix}.$$

Also $(\vec{a} \mid \vec{a}) = 1 \Rightarrow \|\vec{a}\| = 1$, ähnlich $\|\vec{b}\| = 1$.

Da auch $(\vec{a} \mid \vec{b}) = 0$ sind die 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. OMB von $\mathbb{R}^2$.

Beispiele.

1) $$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(D3)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} -1.$$

Da Spalten vertauscht werden

2) $$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 3+2 \\ 6 & 5+4 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{(D2)}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{(D2)}{=} 2\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) $$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 1 \\ 3\cdot 2 & 2 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aber $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(D3)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Also $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 0.$

Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, dass $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear unabhängig sind, aber $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ nicht. Was passiert, wenn wir die Formeln des Gram-Schmidt Verfahrens anwenden?

(1) Das Verfahren liefert eine Orthonormalbasis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von $\mathbb{R}^3$.

(2) Das Verfahren liefert keine Orthonormalbasis von $V = \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

(3) $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ist doch Orthonormalbasis (ONB) von V aber $\vec{c}_3 = \vec{0}$. √

(4) keine der obigen Antworten stimmt.

(5) keine Ahnung.