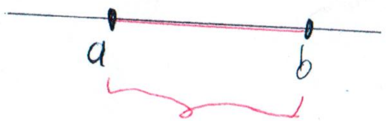
2.7 Der Betrag: Für $a\in\mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & a\geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$ der Betrag von a.

Beispiel $|-4| = -(-4) = 4$, da $-4<0$.

Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a\in\mathbb{R}$, also auch $|a-b| = |b-a|$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$. $|a-b|$ ist der Abstand von a und b auf der Zahlengeraden



$|a-b|$: Länge der Strecke

Regeln: Seien $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a|\geq 0$; (2) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a=0$;

(3) $|ab| = |a|\cdot|b|$,

(4) $\pm a \leq |a|$ und $\big(|a|\leq c \Longleftrightarrow (a\leq c$ und $-a\leq c)\big)$;

(5) $|a+b| \leq |a|+|b|$ Dreiecksungleichung

(6) $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$ umgekehrte Dreiecksungleichung.

Beweis von (5), (6) angenommen (4).

(5) Wenn $a+b\geq 0$ dann $|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$.

weil nach (4) $a\leq|a|$ und $b\leq|b|$

Analog wenn $a+b\leq 0$ dann $|a+b| = (-a)+(-b) \leq |a|+|b|$.

(6). Nach (5) ist $|a| = |a\underbrace{-b+b}| \leq |a-b|+|b|$.

sehr gewöhnlicher Trick.

$\Longrightarrow$ $|a|-|b| \leq |a-b|$. (*)

Wir können die Rolle von a,b vertauschen zu bekommen

$$|b|-|a| \leq |b-a| = |b-a|.$$

oder $-(|a|-|b|) \leq |a-b|$ (**)

Aus (*), (**) und den zweiten Teil von (4) folgt $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.

Intuition für die Dreiecksungleichung.

$|a+b| \leq |a|+|b|$.

$|a|, |b|$ sind positive Zahlen die addiert werden. Aber wenn a,b nicht das gleiche Vorzeichen haben werden sie subtrahiert.

Beispiel: Zeigen Sie, dass es kein $x\in\mathbb{R}$ gibt mit $|x|+|x-3| = 1$.

Lösung: Aus der Dreiecksungleichung folgt

$|x|+|3-x| \geq |x+(3-x)| = |3| = 3 > 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Da $|x-3| = |3-x|$ folgt, dass $|x|+|x-3| > 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Bsp Ist $a=5$, $b=-3$, dann $|a-b|=8$ aber $||a|-|b||=2$. Auch $|a+b|=2$, $|a|+|b|=8$. Das Beispiel zeigt, das die Dreiecksungleichung und die Umgekehrte Dreiecksungleichung echte ungleichungen sein können.

2.6 Das kartesische Produkt.

Seien M_1, M_2 Mengen. Die Menge der geordneten Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ der Mengen M_1, M_2. Also

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

Beispiele: $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{0, 2, 4\}$.

$$M_1 \times M_2 = \{(1,0), (1,2), (1,4), (2,0), (2,2), (2,4)\}$$

Bemerkung: Allgemein $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$.

z.B Ist $M_1 = \{1, 2\}$ $M_2 = \{6\}$ dann $M_1 \times M_2 = \{(1,6), (2,6)\}$, $M_2 \times M_1 = \{(6,1), (6,2)\}$

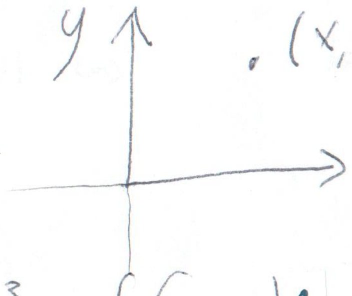
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M_1, M_2, \dots, M_n$ Mengen dann

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n\}.$$

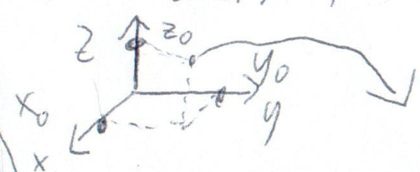
Beispiel 2.8. $M = \{0, 1\}$.

$$M^3 = M \times M \times M$$
$$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Bsp $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.



$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.



(x_0, y_0, z_0).