

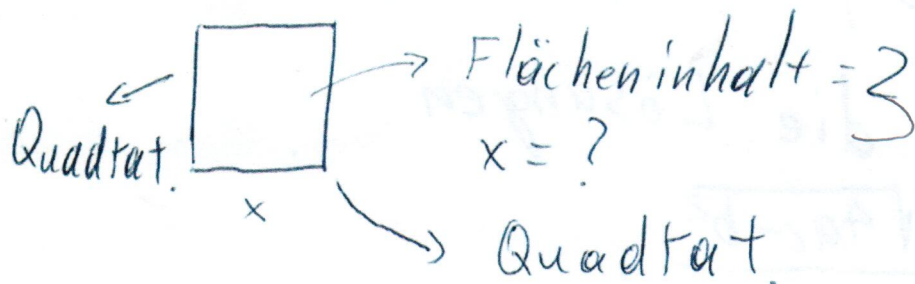
2.7 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen: Reelle Zahlen reichen nicht
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ wurde erst eingeführt.

$x + 5 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{N} \leadsto \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$,

$-3x = 5$ keine Lösung $\mathbb{Z} \leadsto \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$x^2 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{Q} \leadsto \mathbb{R}$.



$x^2 = -1$ keine Lösung $\leadsto \mathbb{C}$.

↓
Menge der komplexen
Zahlen.

2.7 Komplexe Zahlen

Wir betrachten

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|l} \swarrow \\ b^2 - 4ac \geq 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}$$

$\searrow$
 $b^2 - 4ac < 0$
Keine Lösung $x \in \mathbb{R}$
da $\sqrt{b^2 - 4ac}$ nicht definiert

Wir fuhren eine Zahl i ein, mit $i^2 = -1$
Dann $(i\sqrt{4ac - b^2})^2 = i^2(4ac - b^2) \stackrel{i^2 = -1}{=} -b^2 + 4ac$

Also hat (1) die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Sei $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$.

$\downarrow$
Menge der komplexen Zahlen.

Man kann komplexe Zahlen wie reelle Zahlen addieren / multiplizieren.

Beispiel: $(1+3i) + (4+5i) = (1+4) + (3+5)i = 5+8i$

$(1+i)(2+3i) = 2+3i+2i+3i^2 \stackrel{\text{Da } i^2 = -1}{=} -1+5i$

Sei $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{Re} z$

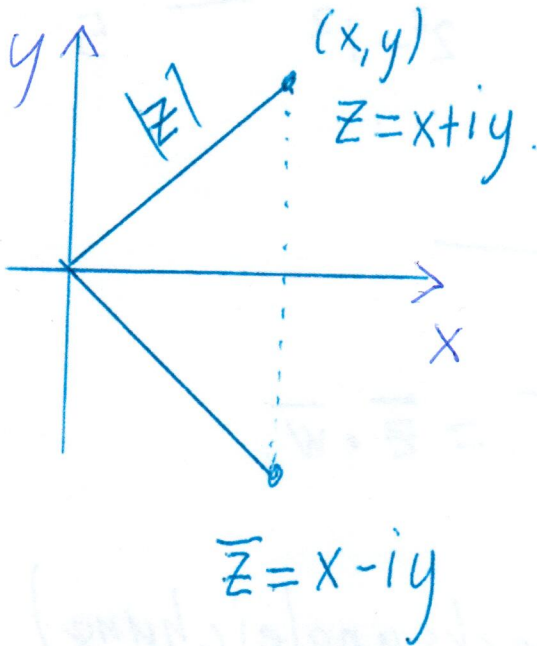
("Realteil von z ")

$\operatorname{Im} z$

("Imaginärteil von z ."

Man kann z mit dem Punkt (x, y) in $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

xy -Ebene



$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

"Betrag von z " (Abstand zwischen 0 und z .)

$$\bar{z} := x - iy.$$

konjugiert komplexe Zahl.

Dann $|z| = |\bar{z}|$.

$$\left. \begin{aligned} z + \bar{z} &= (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z. \\ z - \bar{z} &= (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Beispiel $z = 3 - 4i$. Dann

$\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -4$ (und nicht $-4i$).

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \bar{z} = 3 + 4i.$$

$$z = x + iy \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2$$

Da $i^2 = -1$

$$x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow \boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2} \quad (*)$$

Also $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \stackrel{(*)}{=} \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Beispiel: $\frac{1}{2+i} = \frac{(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2 - i^2} = \frac{2-i}{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

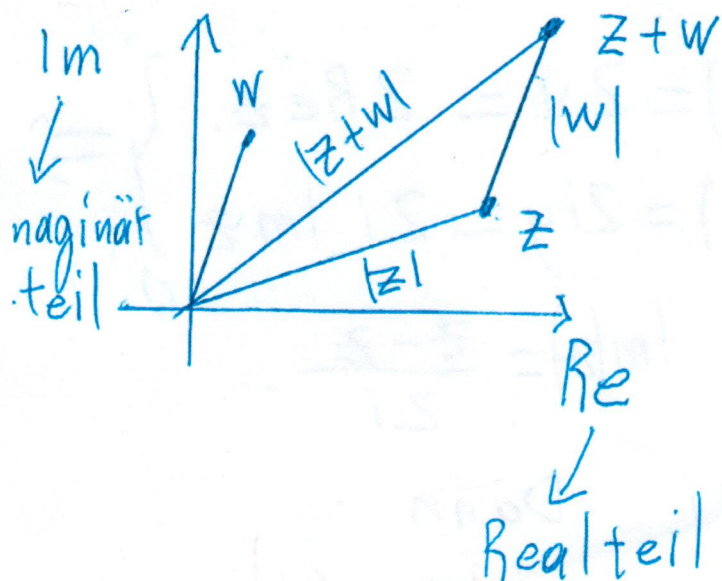
Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(3) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(4) $||z| - |w|| \leq |z - w|$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung)



(3) sagt geomettisch:
gerade aus ist
immer der kürzeste
Weg.

Beweis: Ist $z = x + iy$, $w = u + iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

dann $z + w = x + u + i(y + v) \Rightarrow \overline{z + w} = x + u - i(y + v)$

und $\bar{z} = x - iy$, $\bar{w} = u - iv \Rightarrow \bar{z} + \bar{w} = x + u - i(y + v)$

Also $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Ähnlich zeigt man $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

$$(2) \quad z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

$$\Rightarrow |z \cdot w| = \sqrt{(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2} =$$
$$\sqrt{x^2 u^2 + y^2 v^2 - 2xu yv + x^2 v^2 + y^2 u^2 + 2xv yu}$$

$$= \sqrt{x^2 u^2 + x^2 v^2 + y^2 u^2 + y^2 v^2} = \sqrt{x^2(u^2 + v^2) + y^2(u^2 + v^2)}$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)} = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$= |z| |w|.$$

Wir betrachten die Zahl

$$z = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}. \quad \text{Bestimmen Sie}$$

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ und $|z|$. (Bsp 2.11).

Lösung

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\left[(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \right] = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \text{Also}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \text{Deshalb}$$

$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$