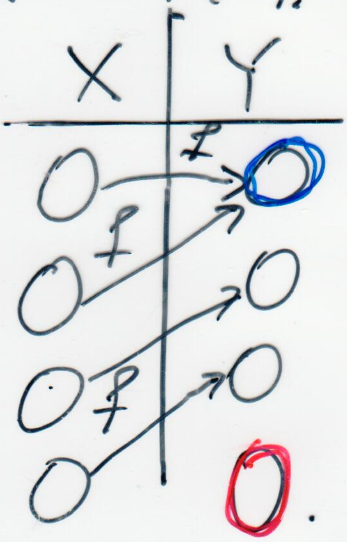
3 Funktionen

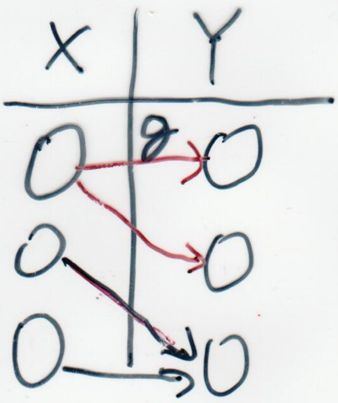
3.1 zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine <u>Funktion</u>/<u>Abbildung</u> f ordnet zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Dann schreibt man $y = f(x)$. Schreibweisen $f: X \to Y$

$x \to f(x)$.



Möglicherweise gibt es Elemente in Y, auf die kein x abgebildet wird, oder auf die mehrere Elemente von x abgebildet werden.



Hier wäre g keine Funktion, weil wenn ein Element von X auf mehrere Elemente von Y abgebildet wird.

X heißt <u>Definitionsbereich</u> von f

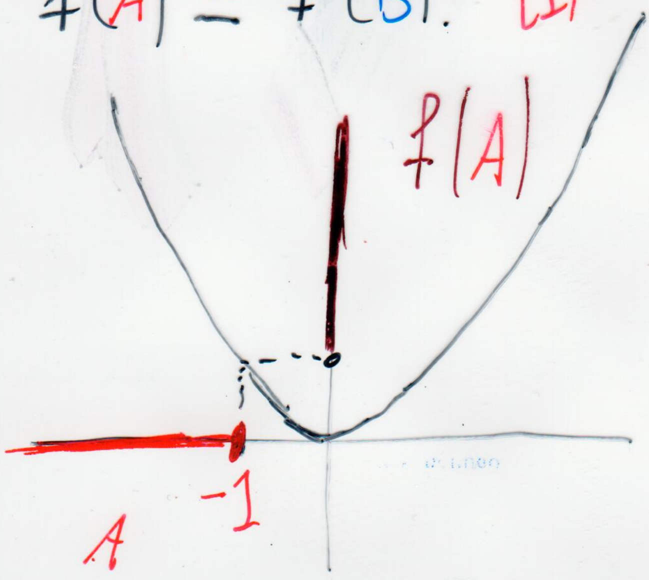
Y heißt <u>Wertebereich</u>. von f

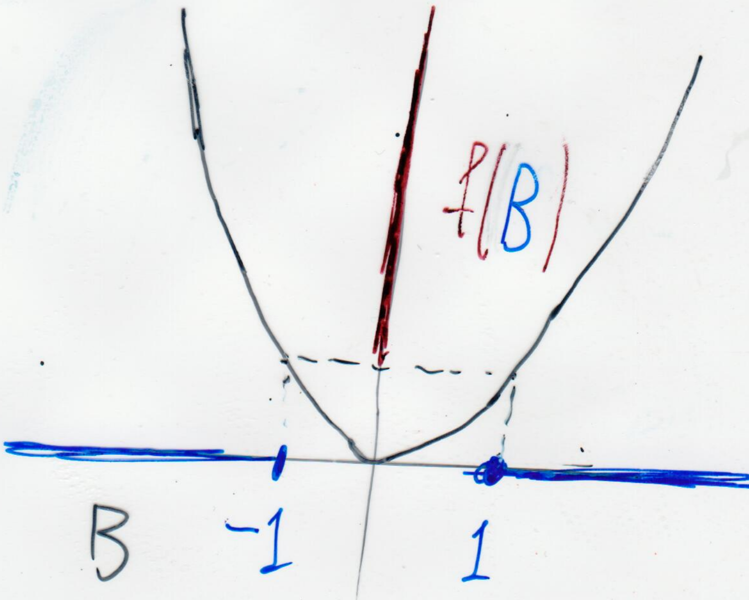
Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ <u>Bild</u> von A unter f und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ <u>Urbild</u> von B unter f. $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ heißt <u>Bild</u> von f.

<u>Bsp 3.1</u> Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$.

(a) -1 ist nicht in Bild von f, da $f(x) = x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Also das Bild von f ist nicht gleich wie der Wertebereich $\mathbb{R}$ von f.

(b) Ist $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Dann $A \subseteq B$ also $f(A) \subseteq f(B)$. (1)





Wir zeigen jetzt, dass $f(B) \subseteq f(A)$.

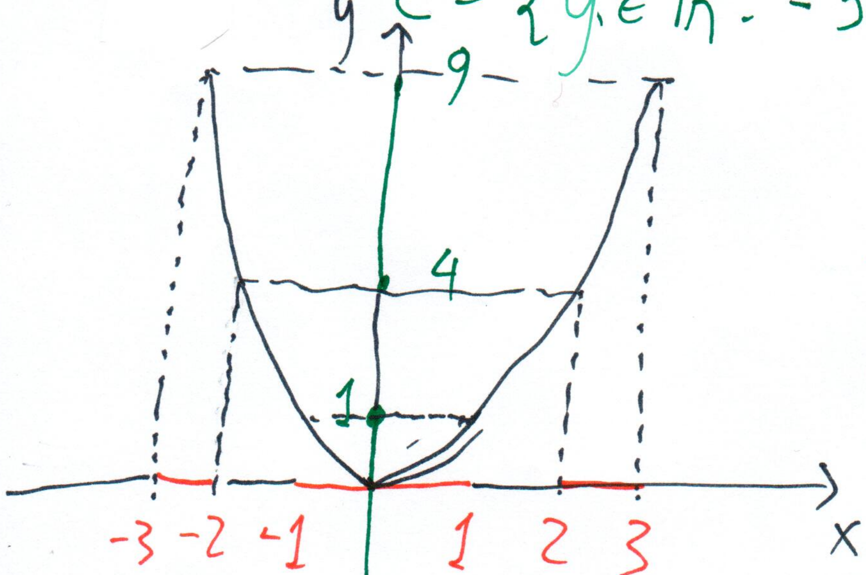
Sei $x \in B$. Ist $x \leq 0$ dann $x \leq -1$ also $x \in A$ deshalb $f(x) \in f(A)$.

Ist $x \geq 0$ dann $x \geq 1$ also $-x \leq -1$ deshalb $-x \in A$. Aber dann $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x) \in A$. Also wir haben gezeigt: Ist $x \in B$ dann $f(x) \in f(A)$.

Also $f(B) \subseteq f(A)$. (2)

Aus (1), (2) folgt $f(A) = f(B)$.

$C = \{y \in \mathbb{R} : -5 \leq y \leq 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : 4 \leq y \leq 9\}$.



Dann

$f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in C\}$.

Also besteht $f^{-1}(C)$ auf allen Punkten, die in C abgebildet werden (siehe Skizze).

Da $x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1$ und $4 \leq x^2 \leq 9 \iff 2 \leq |x| \leq 3$ folgt, dass

$f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \vee (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

1) Definition: 3.1

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion.

a) f heißt <u>injektiv</u>, falls gilt

$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

d.h. falls es zu jedem Element genau ein Urbild gibt. Äquivalent, falls gilt

$\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b) f heißt <u>surjektiv</u>, falls $f(X) = Y$ gilt d.h. falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(c). f heißt <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

<u>Bsp 3.2</u> a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Ist nicht injektiv weil z.B $f(2) = 4^2 = f(-2)$. Ist nicht surjektiv weil es kein x gibt mit z.B $f(x) = -1$ weil $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 2x$ ist bijektiv weil $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ also ist g injektiv. Zusätzlich ist

$y \in \mathbb{R}$ dann $y = g(2y)$ also y ist in Bild von g. Also ist Bild von g $\mathbb{R}$ und deshalb ist g surjektiv.

Da g injektiv und surjektiv ist ist g bijektiv.

3.2 <u>Komposition</u>: Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Funktionen, so definiert

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \to g(f(x))$$

eine Funktion ("g nach f") die <u>Komposition</u> oder <u>Hintereinanderausführung</u> von f und g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

<u>Bsp 3.3</u> Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = e^x$ dann

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

und

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$

Also allgemeine $f \circ g \neq g \circ f$. Wenn X, Y, Z nicht gleich sind, kann es sein, dass $f \circ g$ nicht definiert werden kann.

Satz 3.1 Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ Funktionen, so gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \text{(Assoziativität)}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & Z \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g \circ f"] \arrow[r, "h \circ g \circ f"'] & W
\end{tikzcd}$$

(wegen der Assoziativität kann man die Klammern weglassen)

3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f: X \to Y$, $x \mapsto y$ bijektiv. Dann ist $f^{-1}: Y \to X$, $y \mapsto x$ die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f.

Bsp 3.4 Sei g wie im Bsp 3.2 b) also $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$. Dann $g^{-1}(2x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}$
Insbesondere, wenn wir x mit $\frac{x}{2}$ ersetzen, bekommen wir $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Beispiel 3.5 Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge, so heißt die Funktion $X \to X$, $x \mapsto x$ die Identität auf X. Schreibweise: Id_X, id_X. Id_X ist bijektiv und

$$(Id_X)^{-1} = Id_X.$$

Bemerkung 3.1 Ist $g: X \to Y$ bijektiv, so gilt $g \circ g^{-1} = id_Y$, $g^{-1} \circ g = id_X$.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Ist der Wertebereich von f gleich wie das Bild von f?

(b) Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Dann

(i) $f(A) \subsetneqq f(B)$.

(ii) $f(B) \subsetneqq f(A)$.

(iii) $f(A) = f(B)$.

(iv) keine von den obigen Aussagen stimmt.

(v) keine Ahnung.

(c) Sei $C = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 9\}$.

Dann (i) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (0 \leq x \leq 1) \vee (2 \leq x \leq 3)\}$.

(ii) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \wedge (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

(iii) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \vee (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

(iv) keine der obigen Antworten stimmt.

(v) keine Ahnung.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(a) Ist der Wertebereich von f gleich wie das Bild von f?

(b) Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Dann

(i) $f(A) \subsetneq f(B)$.

(ii) $f(B) \subsetneq f(A)$.

(iii) $f(A) = f(B)$.

(iv) keine von den obigen Aussagen stimmt.

(v) keine Ahnung.

(c) Sei $C = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 9\}$.

Dann (i) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (0 \leq x \leq 1) \vee (2 \leq x \leq 3)\}$.

(ii) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \wedge (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

(iii) $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : (|x| \leq 1) \vee (2 \leq |x| \leq 3)\}$.

(iv) keine der obigen Antworten stimmt.

(v) keine Ahnung.