Satz 3.2: Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$. Ähnlich $f = g^{-1}$. Insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.

Bem 3.2 Es ist wichtig, dass beide unterstrichene Annahmen erfüllt sind.

Bsp 3.6 Sei $f: \{1\} \to \{1,2\}$ mit $f(1) = 2$, und $g: \{1,2\} \to \{1\}$ mit $g(1) = g(2) = 1$. Dann.

$g \circ f : \{1\} \to \{1\}$, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$.

Also $(g \circ f) = id_{\{1\}}$. Trotzdem ist f nicht bijektiv.

Satz 3.3: Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ bijektiv, so ist $g \circ f: X \to Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: Z \to X$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[dr, shift left, "g \circ f"] & Y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift left, "g"] \\
& Z \arrow[u, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ul, shift left, "f^{-1} \circ g^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

4. Die reellen Zahlen Gründlicher

Man kann die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch Axiome einführen, d.h durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an.

4.1 Körperaxiome

Es gibt Verknüpfungen $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$(a,b) \mapsto a+b$ $\quad (a,b) \mapsto a \cdot b$ mit

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a(bc) = (ab)c$,
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + ac$, $a \cdot b = b \cdot a$,
$a+b = b+a$.

$\exists\ 0 \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0 = a.$

$\exists\ 1 \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a.$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists\ -a \in \mathbb{R}: \quad a+(-a) = 0.$

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}: \quad a \cdot a^{-1} = 1.$

Schreibweisen: $a - b := a + (-b)$

falls $b \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} := ab^{-1}.$

4.2 Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine

Ordnung "$\leq$" mit folgenden Eigenschaften

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt

$a \leq b$ oder $b \leq a$ (insbesondere $a \leq a$)

($a \leq b$ und $b \leq c$) $\Rightarrow$ $a \leq c$.

($a \leq b$ und $b \leq a$) $\Rightarrow$ $a = b$.

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

($a \leq b$ und $c \geq 0$) $\Rightarrow$ $ac \leq bc$.

Schreibweisen $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

$a < b \Leftrightarrow (a \leq b$ und $a \neq b)$

$b > a \Leftrightarrow a < b$.

4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. (M hat Elemente.) M heißt nach oben [bzw. nach unten] beschränkt wenn $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ mit $a \leq \gamma$ [bzw. $a \geq \gamma$] $\forall a \in M$.

In diesem Fall heißt γ eine obere [bzw untere] Schranke von M.

Bsp 4.1 $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 1\}$ ist nac
oben beschränkt weil $a\le 2$ $\forall a\in[0$
Ist auch nach unten beschränkt we
$0\le x \quad \forall x\in[0,1]$.

In Bsp 4.1 2 [bzw 0] ist eine obe-
re [bzw. untere] Schranke von $[0,1]$.

Eine obere [bzw. untere] Schranke γ von M mit $\gamma\in M$ heißt Maximum [bzw. Minimum] von M und wird mit $\operatorname{Max} M$ [bzw. $\operatorname{Min} M$] bezeichet. Wenn $\operatorname{Max} M$ [bzw. $\operatorname{Min} M$] existiert, dann ist es eindeutig.

$M\subseteq\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$ heißt nach oben [nach unten] beschränkt wenn $\exists\gamma\in\mathbb{R}$ mit $a\le\gamma$ [bzw $\gamma\le a$] $\forall a\in M$.

$[0,1]=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 1\}$, $[4,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\ge 4\}$.

Bsp 9.2 | Wir betrachten die Mengen

$C = [0,1] \cup [4,\infty)$ und $A = (\mathbb{R} \setminus C) \cup [2,3]$.

Wählen Sie alle richtigen Aussagen für

A, C

(1) A ist nach oben beschränkt. √

(2) A ist nach unten beschränkt. X

(3) A hat ein Maximum X

(4) 5, 10 sind obere Schranken von A √

(5) Es gibt die kleinste obere Schranke von A. √

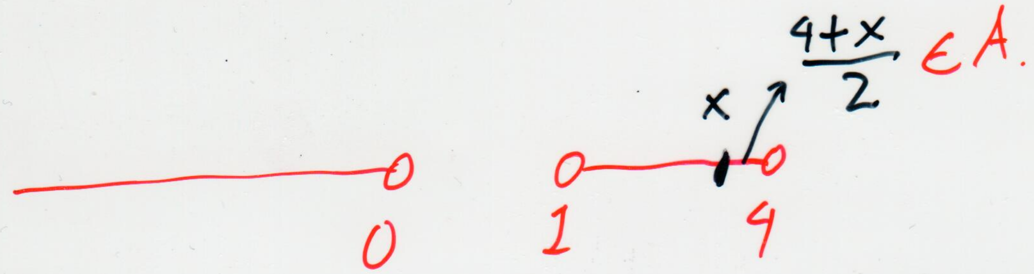
(6) C ist nach oben beschränkt. X

(7) C ist nach unten beschränkt. √

(8) C hat ein Minimum. √

(1) ist richtig. $A = (\mathbb{R} \setminus C) \cup [2,3]$.

$A = (-\infty, 0) \cup (1, 4)$



$a \leq 5 \quad \forall a \in A$ deshalb ist A nach oben beschränkt.

(2) Wenn $x \in \mathbb{R}$ dann

$b := x - |x| - 1 < 0$ also $b \in A$ und $b < x$ also ist x keine untere Schranke von A. Also ist A nicht nach unten beschränkt.

(3). 4 ist eine obere Schranke von A. $4 \notin A$. Jede Zahl $3 < x < 4$ * ist keine obere Schranke von A weil $x < \underbrace{\frac{4+x}{2}}_{\in A} < 4$.

* wenn $x \leq 3$ ist offensichtlich x keine obere Schranke

x ist keine obere Schranke von A.

Also A hat kein Maximum aber 4 ist die kleinste obere Schranke von A.