Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Wir setzen

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall.

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall.

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall.

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ " "

$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

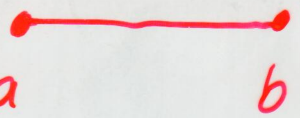
$(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

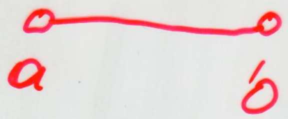
$[a,a] = \{a\}$

$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

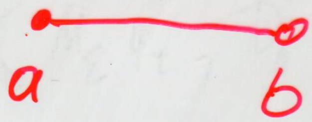
$[a,b]$



(a,b)



$[a,b)$



Bsp 9.2

Wir betrachten die Mengen

$C = [0,1] \cup [4,\infty)$ und $A = (\mathbb{R} \setminus C) \cup [2,3]$.

Wählen Sie alle richtigen Aussagen für A, C

(1) A ist nach oben beschränkt. ✓

(2) A ist nach unten beschränkt. ✗

(3) A hat ein Maximum ✗

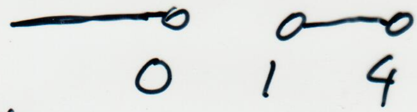
(4) 5, 10 sind obere Schranken von A. ✓

(5) Es gibt die kleinste obere Schranke von A. ✓

(6) C ist nach oben beschränkt. ✗

(7) C ist nach unten beschränkt. ✓

(8) C hat ein Minimum. ✓

$A = (-\infty, 0) \cup (1,4)$ 

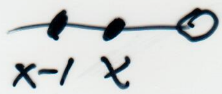
(2)

zu zeigen

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$. z.z x ist keine untere Schranke von A.

Fall 1: Ist $x > 0$ dann $x > -1$ und $-1 \in A$ also ist x keine untere Schranke.

Fall 2: Ist $x \leq 0$ dann $x-1 < 0$ also $x - 1 \in A$. Da $x-1 < x$ ist x keine untere Schranke von A.



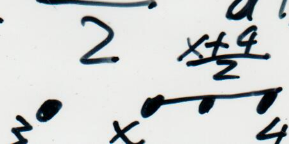
---

(3) A hat kein Maximum.

zuerst $4 \notin A$ also ist 4 kein Maximum von A. Ähnlich wenn $x \geq 4$ ist $x \notin A$ also ist x kein Max A. Sei $x < 4$. z.z x ist keine ~~unt~~ obere Schranke von A.

Fall 1: $x < 3$, $3 \in A \Rightarrow x$ keine obere Schranke.

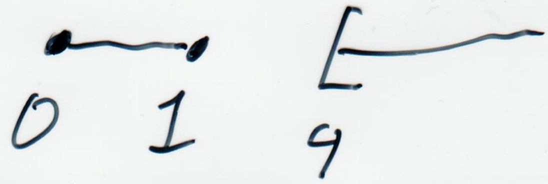
Fall 2: $3 \leq x < 4$. dann $3 < x < \frac{x+4}{2} < 4$ also $\frac{x+4}{2} \in A$ und $x < \frac{x+4}{2}$ also ist x keine obere Schranke



Daraus folgt: A hat kein Maximum und 4 ist die kleinste obere Schranke von A (Aussage 5).

$C = [0,1] \cup [4,\infty)$ hat Minimum weil $x \geq 0 \quad \forall x \in C$ und $x \in C$

Also $0 = \operatorname{Min} C$.



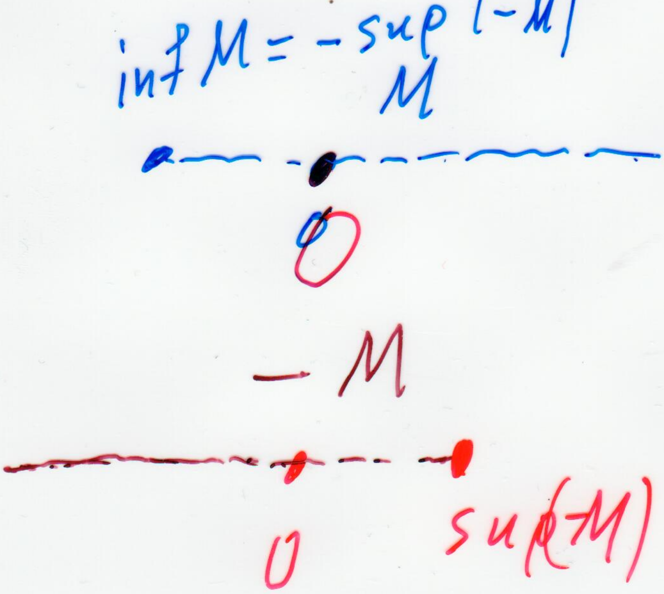
<u>Def 4.1</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. a) Ist γ eine obere Schranke von M, so dass $a \geq \gamma$ für jede obere Schranke a von M dann heißt γ Supremum von M (kleinste obere Schranke von M, $\sup M$.

b) Ist γ eine untere Schranke von M, so dass $a \leq \gamma$ für jede untere Schranke von M, dann heißt γ Infimum von M ($\inf M$) größte untere Schranke.

$\mathbb{R} \setminus C$.

Folgerung 4.1. ~~Jede~~ Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt. Dann existiert $\inf M$.

Beweisidee: $-M := \{-x : x \in M\}$ ist nach oben beschränkt also es gibt $\sup(-M)$. Dann $\inf M = -\sup(-M)$.



$M = [1,3]$

$\inf M = 1$.

$-M = [-3,-1]$.

$\sup(-M) = -1$.

__Def 4.2__ Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ heißt __beschränkt__ wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

__Bsp 4.5__ $[1,3]$ ist beschränkt weil 1 untere Schranke 3 obere Schranke.

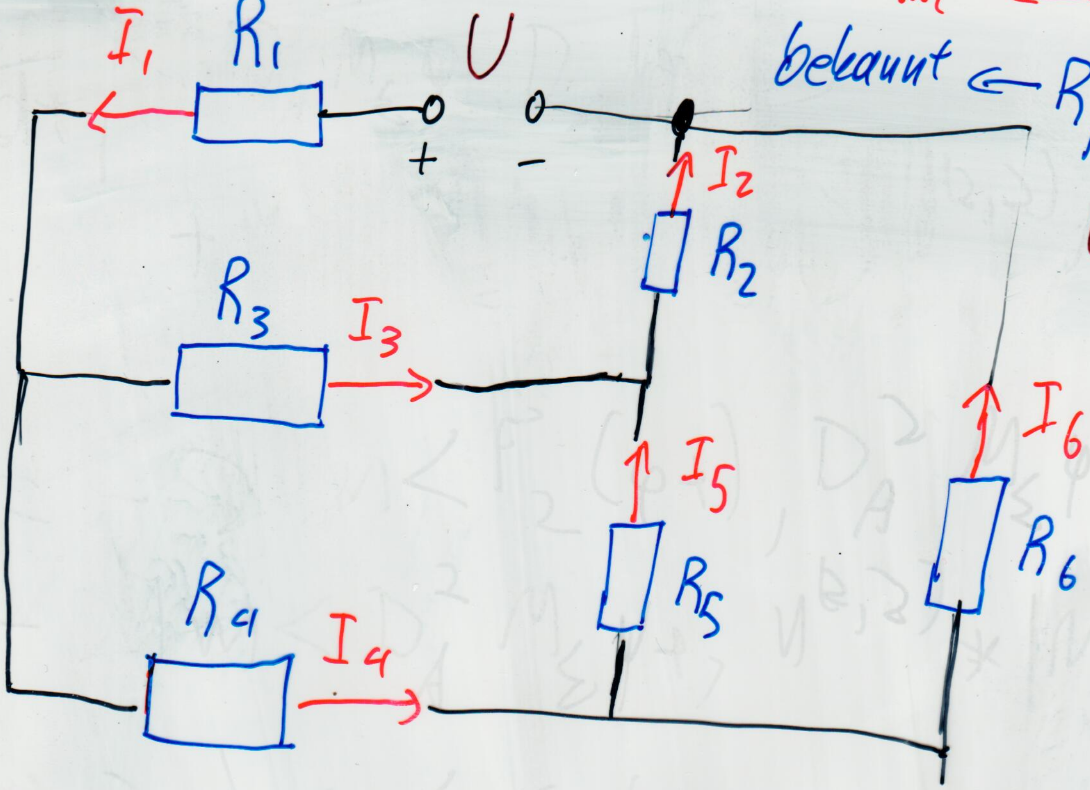
unbekannt ← I_j: Ströme

bekannt ← R_j: Widerstände

U: Spannung

↓

bekannt



$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_4 = 0 \\ -I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_5 - I_6 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = U \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0. \\ R_2 I_2 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0. \end{cases}$$

Hat das System der Gleichungen Lösungen? Wie viele? Wie kann man sie bestimmen? Dieser Fragen werden wir mit Hilfe der linearen Allgebra antworten.

13. Grundzüge der linearen Algebra.

Unten ist immer $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Def 13.1 $K^n = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{n \text{ Mal}}$

$= \{ (x_1, \ldots, x_n) : x_j \in K \;, \forall j = 1, \ldots, n \}.$

Wir definieren $+ : K^n \times K^n \to K^n$

$\cdot : K \times K^n \to K^n$ wie folgt.

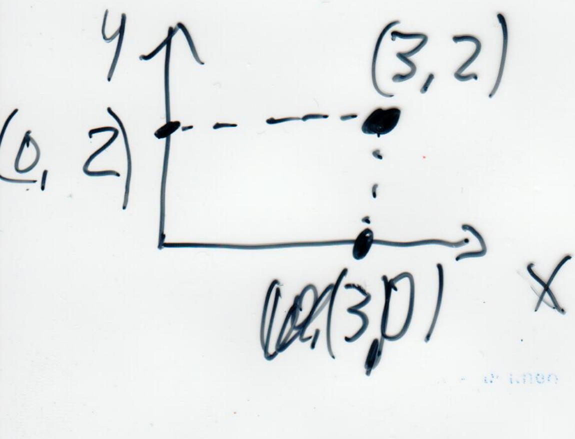
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

komponentenweise Multiplikation mit α

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

komponentenweise Addition.

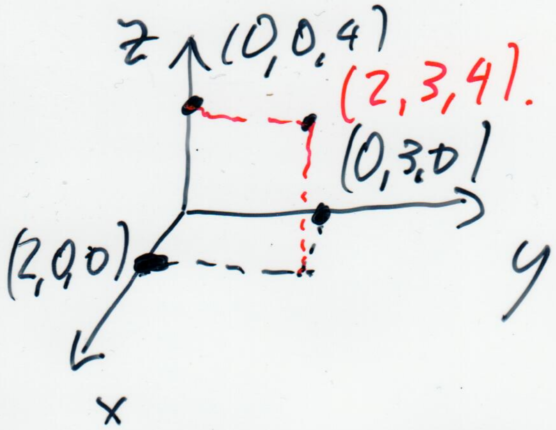
Bsp 13.1 $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}.$



$5 \cdot (1,2) + (3,6) =$

$= (5,10) + (3,6) = (8,16).$

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$.



$\mathbb{R}^6$ könnte wichtig sein. Seien $\{I_1, I_2, I_3, \ldots, I_6$ ströme eine linearen elektrische Netzes. Dann können wir sie in einem Element $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$ von $\mathbb{R}^6$ zusammenfassen, und die 6 "Objekte" als 1 "Objekt" verstehen.

13.1 Vektorraumaxiome

Sei $V = K^n$. dann für $\cdot$, $+$ gilt.

(V1) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in V$.

(V2) $x+y = y+x \quad \forall x,y \in V$.

(V3) $\exists\ 0 \in V$ mit $x+0 = x \quad \forall x \in V$.

(V4) $\forall x \in V$, $\exists -x \in V$ mit $x+(-x) = 0$.

(V5) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in V$.

(V6) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in V$.

(V7) $1x = x$ $\forall x \in V$.

Eine Menge V mit den Eigenschaften (V1)-(V7) heißt K-Vektorraum / Vektorraum über K. Ein $u \in V$ heißt Vektor.