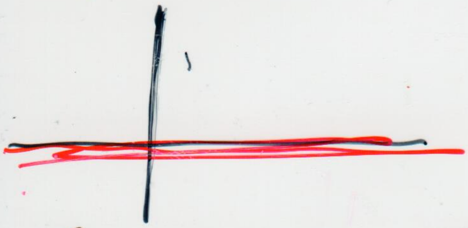
Bsp 13.2 Die Menge $A = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit addition $f+g$ definiert durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $\forall x \in [0,1]$ und $\cdot$ wird definiert durch $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ $\forall x \in [0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

13.2 Unterräume und linearer Aufspann

Def 13.3: Sei V ein K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. U heißt Unter(vektor)raum oder (linearer) Teilraum von V wenn $\forall x, y \in U$, $\alpha \in K$ gilt $\alpha x \in U$ und $x + y \in U$. (der Punkt der Multiplikation wird gewöhnlich weggelassen.

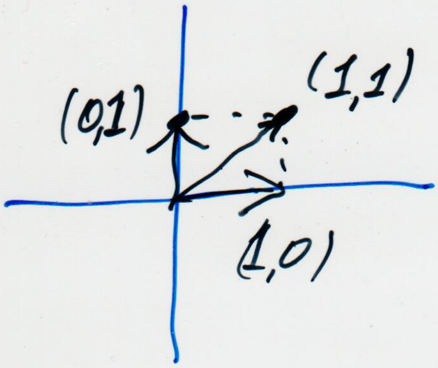
Bsp 13.3 $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
$= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.



U ist unterraum von V.

Seien $a, b \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $a = (x_1, 0)$, $b = (x_2, 0)$. Dann $a + b = (x_1 + x_2, 0) \in U$, $\alpha \cdot a = (\alpha x_1, 0) \in U$. Also ist U ein Teilraum von V.

Sei $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$. W ist kein Teilraum von V

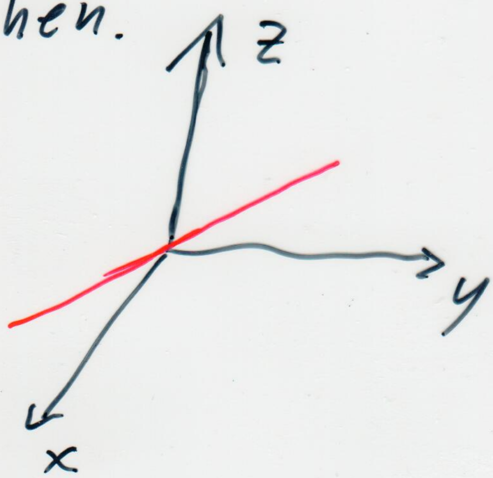


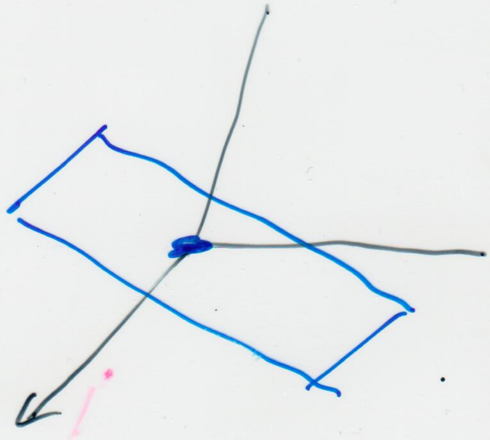
weil $(1,0) \in W$, $(0,1) \in W$

aber $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W$

Bsp. 13.5 Die Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind (i) $\{(0,0,0)\}$, (ii) $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ triviale Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (allgemein für einen K-Vektorraum V sind $\{0\}$, V Teilräume von V (trivialle Teilräume von V)).

(iii) Geraden oder Ebenen die durch $\{(0,0,0)\}$ gehen.





Bsp 13.4 Wählen Sie alle Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ ✗

(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ ✗

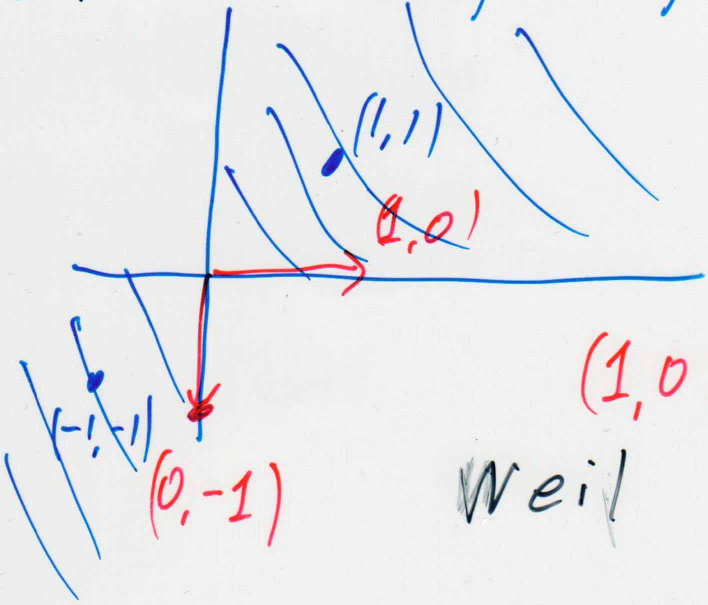
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\}$. ✓

(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 5\}$. ✗

(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$. ✓

(6) $\{\lambda (5,3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. ✓

(1) $A=\{(x,y): x\cdot y \geq 0\}$.



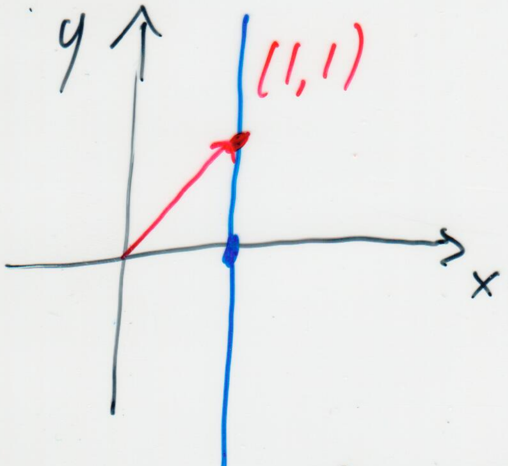
$(1,0) \in A$

$(0,-1) \in A$.

$(1,0)+(0,-1) = (1,-1) \notin A$

Weil $1(-1) < 0$.

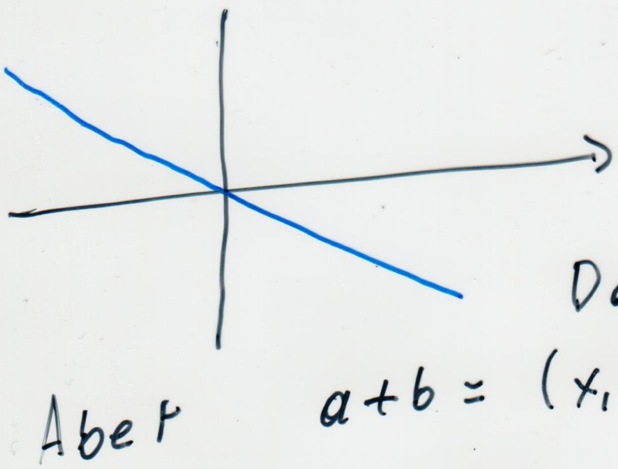
(2) $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 1\}$. Dann $(1,1) \in B$



$2\cdot(1,1) \notin B$. Also ist

B kein Teilraum von $\mathbb{R}^2$.

(3) $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x+4y=0\}$. Ist $a=(x_1,y_1)\in C$



dann $3x_1+4y_1=0$.

Ist $b=(x_2,y_2)\in C$ dann

$3x_2+4y_2=0$.

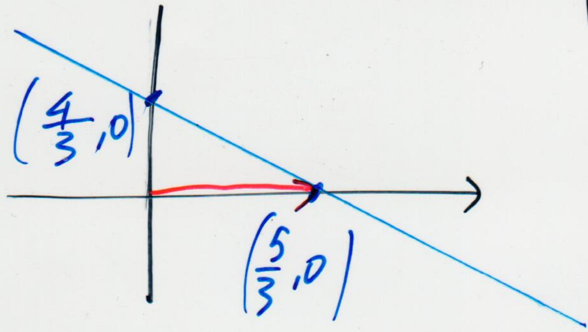
Daraus folgt $3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)=0$. (1)

Aber $a+b = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in C$ wegen (1)

Ähnlich $\alpha\cdot a \in C$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$. Also ist

C ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 5\}$. ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ weil



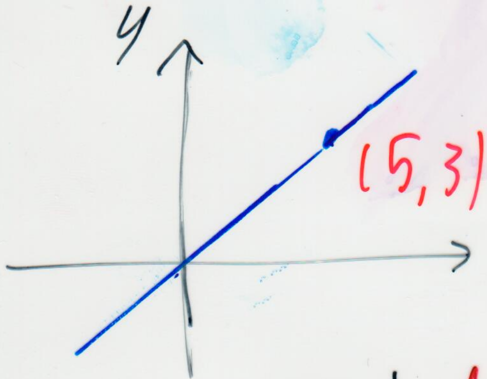
z.B $\left(\frac{5}{3},0\right) \in D$ aber

$$2\left(\frac{5}{3},0\right) = \left(\frac{10}{3},0\right) \notin D$$

weil $3 \cdot \frac{10}{3} + 4 \cdot 0 = 10 \neq 5$.

(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ da $(0,0) + (0,0) = (0,0)$ und $\alpha(0,0) = 0$.

(6) $L = \{\lambda(5,3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. In der Tat



Sind $a, b \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dann $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$a = \lambda_1 (5,3)$, $b = \lambda_2 (5,3)$. Also

$a + b = (\lambda_1 + \lambda_2)(5,3) \in L$ und

$\alpha a = \alpha \lambda_1 (5,3) \in L$

Def 13.4 Sei V ein K-Vektorraum $v_1, \dots, v_n \in V$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Der Vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

heißt **Linearkombination** von $v_1, \dots, v_n$.

Sei $M \subseteq V$ mit $M \neq \emptyset$ dann ist

$$\operatorname{lin}(M) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in K, v_j \in M \ \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

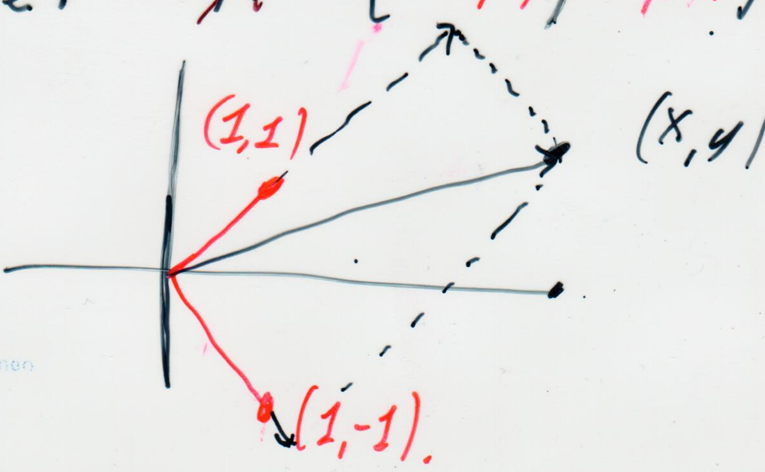
ein Unterraum von V, genannt der von M erzeugte Unterraum / **lineare Aufspann** von M

Bsp 13.6 $V = \mathbb{R}^2$. Der Vektor

$$5\,(1,1) + 4\,(1,-1) = (5,5) + (4,-4) = (9,1)$$

ist eine Linearkombination von $(1,1)$, $(1,-1)$. Sei $M = \{(1,1), (1,-1)\}$.

$\operatorname{lin}(M) = \mathbb{R}^2$.



Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$(x, y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$

$x = \alpha_1 + \alpha_2$, $y = \alpha_1 - \alpha_2$

$x + y = 2\alpha_1$ $x - y = 2\alpha_2$

Also $\alpha_1 = \frac{x+y}{2}$, $\alpha_2 = \frac{x-y}{2}$.

Deshalb $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$

Also $(x,y) \in \operatorname{lin}(M)$. Da $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war ist $\operatorname{lin}(M) = \mathbb{R}^2$.