Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos 28.01.2017

Übungsklausur / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den real und Imaginärteil der Zahl

$$z = (\sqrt{3} - i)^{50}.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(x)-1)}{\ln(x-\frac{\pi}{2}+1)}$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Begründen Sie warum die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Wert.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\cos(x))$.

i) Bestimmen Sie die Zahl $T_1(f, \frac{\pi}{2})(x)$ (erstes Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{2}$).

ii) Zeigen Sie, dass

$$|\sin(\cos(x)) - T_1(f, \frac{\pi}{2})(x)| \leqslant \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + 3(-1)^n}{4}\right)^n (x+3)^{2n}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die die Potenzreihe konvergiert.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Für welche a,b ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} (x-b)^2, & x \leqslant 1 \\ ax, & x > 1 \end{cases}$ differenzierbar in 1?

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln(2x+1) - 2x$ ein globales Maximum in 0 hat. Erklären Sie warum daraus folgt, dass $\ln(x+1) \leqslant x$ für alle $x > -1$.

c) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\int_0^1 x^4 \cos(1-x^5)\,\mathrm{d}x$.

ii) $\int_1^e 3x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Kern von B und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle a, für die das System $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ lösbar ist, und für diese a bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems.

Viel Erfolg!