Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik
Wintersemester 2016/17
Teil: Lineare Allgebra

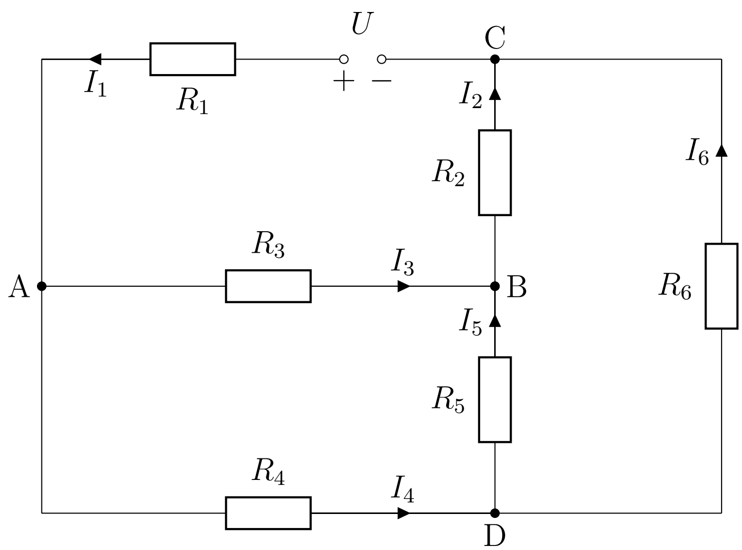
Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

13 Grundzüge der linearen Algebra

Zur Motivation betrachten wir das folgende elektrische Netzwerk mit Spannung U:



Wir stellen die beschreibenden Gleichungen nach den Kirchhoffschen Regeln auf:

- *Knotenregel:* In jedem Knoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.
- *Maschenregel:* In jeder Masche ist die Summe der Spannungsabfälle über den Widerständen gleich der Summe der Spannungen.

Dabei nehmen wir an, dass U und $R_1, R_2, \dots, R_6$ bekannt sind, und wollen die Ströme $I_1, I_2, \dots, I_6$ bestimmen. Durch Betrachtung der Knoten A, B, C, D bzw. der Maschen ABC, ABD, BCD, ADC erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{array}{cccccccc}
I_1 & & -I_3 & -I_4 & & & = & 0 \\
& -I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\
-I_1 & +I_2 & & & & +I_6 & = & 0 \\
& & & I_4 & -I_5 & -I_6 & = & 0 \\
R_1 I_1 & +R_2 I_2 & +R_3 I_3 & & & & = & U \\
& & R_3 I_3 & -R_4 I_4 & -R_5 I_5 & & = & 0 \\
& R_2 I_2 & & & +R_5 I_5 & -R_6 I_6 & = & 0 \\
R_1 I_1 & & & +R_4 I_4 & & +R_6 I_6 & = & U.
\end{array}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit acht Gleichungen für die sechs Unbekannten $I_1, \dots, I_6$. Die natürlichen Fragen sind zunächst die nach **Existenz** und **Eindeutigkeit** der Lösung und ggf. die nach deren **Berechnung**.

Bemerkung: Man kann hier sehen, dass zB Addition der ersten drei Gleichungen (bis aufs Vorzeichen) die vierte Gleichung ergibt und Addition der letzten drei Gleichungen die fünfte ergibt. Es gibt hier also redundante Gleichungen. Wir kommen auf dieses Phänomen zurück.

Lineare Gleichungssysteme treten in vielen Zusammenhängen auf. Wir werden sie in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben, wobei der *Vektor* $\vec{x}$ gesucht wird und der Vektor $\vec{b}$ und die *Matrix* A gegeben sind. Im Beispiel ist $\vec{x} = (I_1, I_2, \ldots, I_6) \in \mathbb{R}^6$ gesucht, die rechte Seite ist $\vec{b} = (0,0,0,0,U,0,0,U) \in \mathbb{R}^8$ und A ist die *Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & -R_6 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 6}$$

mit acht Zeilen und sechs Spalten. Wir kümmern uns zunächst um die Struktur von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

13.1. Verknüpfungen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$: Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen (dh $x_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$) und $\mathbb{C}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ komplexer Zahlen (dh $z_j \in \mathbb{C}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$).

Wir schreiben im folgenden oft $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Also

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Definition 13.1. *Wir definieren Verknüpfungen*

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

durch

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \end{aligned}$$

dh also durch komponentenweise *Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit α. Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.*

Für die **Anschauung** besonders wichtig sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Beispiele im $\mathbb{R}^2$: $(1,1) + (0,1) = (1,2)$, $2 \cdot (1,-1) = (2,-2)$.

13.1 Vektorraumaxiome

Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

$(V1)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
$(V2)$ $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
$(V3)$ es gibt eine $0 \in V$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
$(V4)$ für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
$(V5)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
$(V6)$ $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ und $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ (Distributivität),
$(V7)$ $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

Definition 13.2. *Ist $V \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V\times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K}\times V \to V$, für welche die Eigenschaften $(V1)$–$(V7)$ gelten, so heißt V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ oder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K}$-VR). Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren .*

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist das Element $0 \in V$ in $(V3)$ und für jedes $x \in V$ das Negative $-x$ in $(V4)$ eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für alle $x \in V$: $0 \cdot x = 0$ und $-x = (-1) \cdot x$.

Bemerkung: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist das Element $0 \in V$ in $(V3)$ und für jedes $x \in V$ das Negative $-x$ in $(V4)$ eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für alle $x \in V$: $0\cdot x = 0$ und $-x = (-1) \cdot x$.

Beweis: Die Aussagen zu $(V3)$ und $(V4)$ zeigt man wie im Fall der reellen Zahlen. Sei nun $x \in V$. Es ist $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$, also

$$0 \overset{(V4)}{=} 0\cdot x+(-0\cdot x) = (0\cdot x+0\cdot x)+(-0\cdot x) \overset{(V1)}{=} 0\cdot x+(0\cdot x+(-0\cdot x)) \overset{(V4)}{=} 0\cdot x+0 \overset{(V3)}{=} 0\cdot x.$$

Weiter ist

$$x + (-1) \cdot x \overset{(V7)}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{(V6)}{=} (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

also $(-1) \cdot x = -x$.

Wichtiges Beispiel Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ können wir auch auffassen als Abbildung (Funktion)

$$x : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{K} \text{ mittels } x(j) := x_j \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Allgemeiner sei nun $I \neq \emptyset$ eine Menge (häufig ist zB $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) und wir betrachten die Menge aller Abbildungen $x : I \to \mathbb{K}$. Setzt man für $x, y : I \to \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} x + y : I \to \mathbb{K}, &\qquad t \mapsto x(t) + y(t),\\ \alpha \cdot x : I \to \mathbb{K}, &\qquad t \mapsto \alpha x(t), \end{aligned}$$

so ist diese Menge bzgl. dieser Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

13.2 Untervektorräume und Linearer Aufspann

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 13.3. *Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unter(vektor)raum oder linearer Teilraum von V, wenn*
(i) $U \neq \emptyset$ ist und
(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.

Beispiele: (0) Jeder Vektorraum V hat die trivialen Untervektorräume $\{0\}$ und V.

(1) $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^3$.

(2) Sind $x, y \in \mathbb{K}^n$, so ist $\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

(3) $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, nicht abgeschlossen unter $+$.

(4) $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. C ist zwar abgeschlossen unter $+$, aber $-x \notin C$ für $x \in C \setminus \{0\}$.

(5) Die nichttrivialen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geraden durch $\vec{0}$, in $\mathbb{R}^3$ kommen Ebenen durch $\vec{0}$ hinzu.

Definition 13.4. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus V. Eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist ein Vektor der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \textit{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$, so ist

$$lin(M) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \Big\}$$

ein Untervektorraum von V, genannt der von M erzeugte Untervektorraum / lineare Aufspann von M.

Beispiele: (1) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\mathrm{lin}(\{(1, 0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

(2) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\mathrm{lin}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

(3) In $V = \mathbb{R}^3$ gilt $\mathrm{lin}(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}) = \{(x, y, x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

13.3 Affine Teilräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt affiner Teil- oder Unterraum von V, falls es einen Untervektorraum U von V und ein $v \in V$ gibt mit

$$W = v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

Bemerkung: Ist $W = w_0 + U$ ein affiner Teilraum, so folgt

$$U = \{w - w_0 : w \in W\} = \{w_1 - w_2 : w_1, w_2 \in W\}.$$

Ist umgekehrt $W \subseteq V$ nicht-leer und

$$U := \{w_1 - w_2 : w_1, w_2 \in W\}$$

ein Untervektorraum von V, so ist W ein affiner Teilraum von V und $W = w + U$, wobei man $w \in W$ beliebig wählen kann.

Bemerkung: In $\mathbb{R}^2$ sei $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ ein Untervektorraum (Gerade durch $(0, 0)$ und $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 1\}$ ein affiner Teilraum. Ist speziell $(a, b) = (1, 1)$, so ist U die durch $y = -x$ gegebene Gerade und W ist die durch $y = -x + 1$ gegebene Gerade, man sieht hier z.B. $W = (1, 0) + U$.

13.4 Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 13.5. *Man ninnt n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig , falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Man sagt dazu, dass man den Nullvektor nur als *triviale Linearkombination* der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erhalten kann (wenn nämlich alle $\alpha_j = 0$ sind, ist natürlich auch $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$).

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie *linear abhängig.* Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind also genau dann linear abhängig, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ findet, die nicht alle $= 0$ sind, mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$.

Beispiele: (1) v ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$ gilt.

(2) In $\mathbb{R}^2$ sind $(1, 0), (0, 1)$ linear unabhängig, aber $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ sind linear abhängig, denn $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = (0, 0)$.

(3) In $\mathbb{K}^n$ sind die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ linear unabhängig. Hierbei ist

$$\vec{e}_j := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Mithilfe des *Kroneckersymbols* $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$ ist also $\vec{e}_j = (\delta_{jk})_{k=1}^{n}$.

(4) In $C^2(\mathbb{R})$ sind $\sin, \cos$ linear unabhängig. Sind nämlich $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \sin + \beta \cos = 0, \quad \text{dh mit} \quad \alpha \sin x + \beta \cos x = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

so erhält man $\alpha = 0$ durch Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = 0$ durch Einsetzen von $x = 0$.

13.5 Zeilenumformungen, Zeilenstufenform

Seien n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix A, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist eine $n \times m$-Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Die Matrix A bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden Zeilenumformungen für eine gegebene $n \times m$-Matrix B mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile w_j durch αw_j, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
(Z2) Ersetze eine Zeile w_j durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$
(Z3) Vertausche die Zeilen w_j und w_k, wobei $j \neq k$.

Bemerkung 13.1. *Die Zeilen von B sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.*

Satz 13.1. *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ überführen, die in Zeilenstufenform (ZSF) ist. Dabei heißt*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit
(i) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;
(ii) für $j = r + 1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.

Beispiel: Wir wenden das Verfahren an auf die ersten vier Zeilen der Matrix A aus dem Beispiel des linearen Elektrischen Netzes in der Einführung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es wurden hierbei keine Zeilen vertauscht. Die ersten drei Zeilen sind also linear unabhängig, alle vier Zeilen sind linear abhängig. Die vierte liegt somit im linearen Aufspann der ersten drei Zeilen.

13.6 Basen und Dimension, Zeilennormalform

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ heißen Basis von V , falls sie linear unabhängig sind und $\operatorname{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = V$ gilt. In diesem Fall enthalten je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die Dimension von V, geschrieben $\dim V$.

Bemerkung 13.2. *Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von Dimension n ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension $2n$.*

Bemerkung 13.3. *Wir betrachten die Vektoren $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$, wobei $e_j := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (alle Komponenten sind Null außer der j-ten). Dann ist $e_1, ..., e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ genannt die Standardbasis.*

Definition 13.6. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$. Die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heißen Koordinaten von v bzgl. der Basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Beweis. Existenz folgt aus $v \in V = \operatorname{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Sind $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, \ldots, n$ mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j = v = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j b_j$, so folgt

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \tilde{\alpha}_j) b_j$$

und weiter $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$, da $b_1, b_2, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind. □

Beispiel: Es gilt $\dim \mathbb{K}^n = n$ und eine Basis ist gegeben durch die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Bemerkung: V ist unendlich-dimensional genau dann, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ gibt.

Beispiel: Die Menge $P[a, b]$ der Polynomfunktionen $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum: Da Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome sind, ist $P[a, b]$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei p_k gegeben durch $p_k(x) := x^k$. Dann sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Polynome $p_0, p_1, \ldots, p_n$ linear unabhängig, denn für $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = 0 \quad \text{auf } [a, b]$$

folgt $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, da nur das Nullpolynom unendlich viele Nullstellen hat (siehe Folgerung des Fundamentalsatzes der algebra im Kapitel 5).

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dann ist die Dimension $\dim \operatorname{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ des linearen Aufspanns von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ gerade die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{v}_1 := (1,1,0)$, $\vec{v}_2 := (1,0,0)$ und $\vec{v}_3 := (0,1,0)$. Dann sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig, aber $\vec{v}_3 \in \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ist Basis von $\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Es ist $\dim \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = 2$. Auch $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ bzw. $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind hier Basen von $\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Warnung: Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist es für die Dimensionsbestimmung wichtig, ob man ihn als $\mathbb{C}$-Vektorraum oder als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet, dh ob man Linearkombinationen mit komplexen oder nur mit reellen Koeffizienten zulässt. So gilt $\mathbb{C}\text{-}\dim \mathbb{C} = 1$, aber $\mathbb{R}\text{-}\dim \mathbb{C} = 2$ (wie schon an der Veranschaulichung von $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlen*ebene* zu sehen ist). Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $1, i$.

Ebenso ist die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum $= n$ und eine Basis ist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist hingegen $= 2n$ und eine Basis ist z.B. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_1, i\vec{e}_2, \ldots, i\vec{e}_n$.

Zeilennormalform Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf <u>Zeilennormalform</u> (<u>ZNF</u>) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ in <u>Zeilennormalform</u> , wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:
(iii) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \ldots, j-1$ (dh oberhalb von c_{jk_j} stehen auch nur Nullen).

Beispiel mit $n = 5$ und $m = 8$, $r = 4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Dieses Beispiel illustriert wie eine Matrix in ZSF in ZNF überführt werden kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13.7 Lineare Gleichungssysteme

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das Matrix-Vektor-Produkt :
Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ ist $A\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^m a_{jk}x_k \right)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$.
Beachte: Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als m-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

13.8 Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A + B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle (j, k) werden die Einträge addiert bzw. mit α multipliziert.

13.9 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\operatorname{Kern} A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

$\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt inhomogen und $\vec{b}$ heißt Inhomogenität der Gleichung. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung, dann und nur dann wenn $\vec{b} \in \operatorname{Bild} A$.

Satz 13.2. *(1) Kern A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ und Bild A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.*

(2) Bild A ist der lineare Aufspann der Spalten von A.

(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Kern} A$. Ist $\vec{z} \in \operatorname{Kern} A$, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b}$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein affiner Teilraum *von $\mathbb{K}^m$. (Also hat das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen).*

Beweis. (2) Für jeden Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ gilt

$$\vec{x} = \sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l, \quad \text{also} \quad A\vec{x} = A\Big(\sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l\Big) = \sum_{l=1}^{m} x_l \Big(\underbrace{A\vec{e}_l}_{l\text{-te Spalte von } A} \Big)$$

(1) und (3) folgen aus den Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes. □

Folgerung: (1) Wir erhalten die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Gleichung (falls es überhaupt welche gibt), indem wir zu einer **speziellen** Lösung der inhomogenen Gleichung alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung addieren.

(2) Es gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar} \iff \vec{b} \in \operatorname{Bild} A \iff \vec{b} \text{ ist LK der Spalten von } A.$$

Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so ist die Lösung eindeutig genau dann, wenn $\operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\}$ gilt.

Beispiele: (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann hat $A\vec{x} = \vec{b}$ keine Lösung.

(2) Sei A wie eben und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar und die Menge aller Lösungen ist der affine Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\operatorname{lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \text{Kern } A} .$$

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{x} := \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Bemerkung: Ein lineares Gleichungssystem kann also keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

13.10 Lösungsalgorithmus, Dimensionsformel

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m+1)$-te Spalte, betrachten also $(A\,|\,\vec{b}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

Beobachtung: Geht die Matrix $(\tilde{B}\,|\,\tilde{\vec{c}})$ aus der Matrix $(B\,|\,\vec{c})$ durch eine Zeilenumformung hervor, so gilt

$$\{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : \tilde{B}\vec{x} = \tilde{\vec{c}}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : B\vec{x} = \vec{c}\},$$

dh die Lösungsmenge der entsprechenden linearen Gleichungssysteme ändert sich nicht.

Allgemein gilt: Geht $\tilde{B}$ aus B durch eine Zeilenumformung hervor und ist die k-te Spalte von B Linearkombination anderer Spalten von B, so ist die k-te Spalte von $\tilde{B}$ Linearkombination der entsprechenden Spalten von $\tilde{B}$ und zwar *mit denselben Koeffizienten*.

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):
(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A\,|\,\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A\,|\,\vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1,\dots,n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1,\dots,m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Für alle Spalten mit der Eigenschaft, dass kein Element von ihnen das erste nicht Null Element seiner Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.

Wir zeigen am Beispiel, wie man im Falle der Lösbarkeit die Lösungen ablesen kann. Dazu nehmen wir an, dass die berechnete Zeilennormalform von $(A\,|\,\vec{b})$ die folgende Gestalt hat (hier ist $n = 4$, $m = 5$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Man nehme die Variablen zu den Spalten, die "hinter" den Stufen stehen (im Beispiel die dritte und die fünfte Spalte), als *freie Parameter* (im Beispiel also etwa $s = x_3$ und $t = x_5$).

Schreibt man die Gleichungen wieder aus, so erhält man

$$x_1 = c_1 - s\alpha_1 - t\beta_1, \quad x_2 = c_2 - s\alpha_2 - t\beta_2, \quad x_4 = c_3 - t\beta_3.$$

Also ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Hier gilt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ und $\dim(\operatorname{Kern} A) = 2$. Die Lösungsmenge ist eine Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Um den Kern einer Matrix A zu bestimmen lösen wir die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Lösungsalgorithmus von Gauß.

Den Kern kann man alternativ mit dem -1 Ergänzung Trick bestimmen und zwar
(1) Man bringt die Matrix A in Zeilennormalform.
(2) Man streicht die Zeilen die Null sind (wenn es solche Zeilen gibt)
(3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind, bis auf ein Element das -1 ist. Die Ergänzung wird so gemacht, damit die diagonalen Elemente der Matrix nur 1 und -1 sind.
(4) Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

Dimensionsformel Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt $\dim \operatorname{Kern} A + \dim \operatorname{Bild} A = n$.
Rang Wir definieren den Rang einer Matrix durch $\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Bild} A$.
Satz Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\iff \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|\vec{b})$.

Beispiele: (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hier ist $n = m = 3$ und $\operatorname{Rang} A = 3$, da die Zeilen (oder auch die Spalten) linear unabhängig sind. Somit ist $\dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 3 = 0$ und $\operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\}$. Ablesen lässt sich das natürlich auch an einer ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hier ist $n = m = 3$ und $\mathrm{Rang}\, A = 2$, da die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind, die dritte Spalte jedoch Summe der ersten beiden. Somit ist $\dim(\mathrm{Kern}\, A) = 3 - 2 = 1$. Durch Probieren findet man $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}\, A$. Folglich ist $\mathrm{Kern}\, A = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Zum selben Ergebnis kommt man mit einer ZNF und anschließender (-1)-Ergänzung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

13.11 Lineare Abbildungen

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Definition 13.7. *Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt linear , (bzw. genauer $\mathbb{K}$-linear), falls für alle $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$

Für ein solches ϕ heißt

$$\mathit{Kern}\, \phi := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

der Kern von ϕ und

$$\mathit{Bild}\, \phi := \{\phi(x) : x \in V\}$$

heißt Bild von ϕ.

Beispiele: (1) Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, so ist die Abbildung $\phi_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, linear. Es ist $\mathrm{Kern}\, \phi_A = \mathrm{Kern}\, A$ und $\mathrm{Bild}\, \phi_A = \mathrm{Bild}\, A$.

(2) Die Abbildung $R[a, b] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, ist linear.

(3) Die Abbildung $C^1([a, b]) \to C([a, b])$, $f \mapsto f'$, ist linear.

(4) Sind $a_0, a_1 \in C(I)$, so ist die Abbildung $C^2(I) \to C(I)$, $y \mapsto y'' + a_1y' + a_0y$ linear.

Satz 13.3. *Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt:*
(1) $\mathit{Kern}\, \phi$[bzw. $\mathit{Bild}\, \phi$] ist ein Unterraum von V [bzw. W].
(2) ϕ ist injektiv $\iff$ $\mathit{Kern}\, \phi = \{0\}$.
(3) Ist ϕ injektiv und sind $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so sind $\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n)$ linear unabhängig in W.

Beweis. (3) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(v_j) = 0$. Da ϕ linear ist, folgt $\phi(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = 0$. Da ϕ injektiv ist, folgt $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$, und aus linearen Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ folgt dann $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. □

13.12 Das Produkt von Matrizen

Wie immer schreiben wir wieder $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Seien $n, m, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$ Matrizen mit $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ und $B = (b_{kl})_{k=1}^{m}{}_{l=1}^{q}$. Das Matrixprodukt $AB \in \mathbb{K}^{n\times q}$, ist die Matrix $C = (c_{jl})_{j=1}^{n}{}_{l=1}^{q}$ mit

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}, \qquad j = 1, \ldots, n, \; l = 1, \ldots, q.$$

Eigenschaften des Produktes von Matrizen: Für alle $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q\times r}$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(A_1 + \alpha A_2)B_1 = A_1B_1 + \alpha A_2B_1, \quad A_1(B_1 + \alpha B_2) = A_1B_1 + \alpha A_1B_2, \quad (A_1B_1)C = A_1(B_1C).$$

Warnung: Im allgemeinen gilt $AB \neq BA$! Damit beide Produkte existieren, muss zunächst $n = q$ sein. Dann ist AB eine $n \times n$-Matrix und BA eine $m \times m$-Matrix. Gleichheit kann also höchstens für $n = m = q$ gelten. Für $n = m = q = 2$ ist aber z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.13 Invertierbare Matrizen

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $I_n := (\delta_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix (wir schreiben auch kurz I, wenn n aus dem Zusammenhang klar ist).

Beispiel: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt dann $IA = AI = A \quad$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Definition 13.8. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, falls $\operatorname{Rang} A = n$ ist, und invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I$. In diesem Fall ist B eindeutig und heißt Inverse von A (oder zu A inverse Matrix). Sie wird mit A^{-1} bezeichnet.*

Beispiel: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Also $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.