Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik
Wintersemester 2016/17

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

Contents

1 Aussagen

1.1 Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

Im Rahmen der Vorlesung sind wir aber eher an **mathematischen Aussagen** interessiert. Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit A, B, C, ...

1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte Wahrheitstafeln .

$A \wedge B$ (logisches "und" (AND))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

$A \vee B$ (logisches "oder" (OR))

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Achtung: Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist zugelassen, dass beide Aussagen A und B wahr sind.

Negation $\neg A$ ("non A" oder "nicht A")

A	w	f
$\neg A$	f	w

Implikation $A \Rightarrow B$ "wenn A, dann B", "A impliziert B", "aus A folgt B"

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Man sagt: "A ist äquivalent zu B", "A ist gleichbedeutend mit B", "A genau dann, wenn B", " A dann und nur dann, wenn B".

1.3 Regeln

$\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A \quad \text{(doppelte Negation)} \\
(A \Leftrightarrow B) & \Leftrightarrow & [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \quad \text{(Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen)} \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) \quad \text{(Negation von “und”)} \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \quad \text{(Negation von “oder”)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) \quad \text{(Umformulierung der Implikation)} \\
\neg(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \quad \text{(Negation der Implikation)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad (\underline{\text{Kontraposition}}).
\end{array}$$

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

1.4 Quantoren

Eine Aussageform $A(x)$, $A(x, y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen x, y, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.

Der Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle Objekte x ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Negation: $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$ und $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$.

In den allermeisten Fällen werden Quantoren eingeschränkt und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x) : B(x)$. Die Negation davon ist dann $\exists x$ mit $A(x) : \neg B(x)$.

Achtung: Bei All- und Existenzquantor kommt es i.a. auf die Reihenfolge an.

Bemerkung: Häufig schreiben wir Quantoren nicht als Zeichen, sondern sprachlich.

2 Mengen

2.1 Der Begriff der Menge

Wir verwenden die folgende naive “Definition”:

"Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte."

Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M, dh x gehört zu M.

$x \notin M$ bedeutet: x gehört nicht zu M, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Schreibweisen: Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x, \text{ für die } A(x) \text{ gilt},$$

Häufig schreibt man auch, wenn die Menge M gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : (x \in M) \wedge A(x)\}$. Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, z.B. $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Seien M_1, M_2 Mengen.

Definition 2.1. *"M_1 ist Teilmenge von M_2":*

$$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2) \quad (\textit{bzw. } \forall x \in M_1 : x \in M_2).$$

Für $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibt man oft der Deutlichkeit halber $M_1 \subsetneqq M_2$.

Gleichheit von Mengen: $M_1 = M_2$ bedeutet, dass M_1 und M_2 dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. Da Äquivalenz zwei Implikationen bedeutet (siehe 1.3) bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

2.3 Operationen mit Mengen

Seien M_1, M_2, M_3 und Q Mengen. D (a) Durchschnitt $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) Vereinigung $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.

(c) Differenz $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("M_1 ohne M_2").

Regeln für Durchschnitt und Vereinigung:

Kommutativität $\quad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \qquad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$

Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3, \qquad M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3.$

Distributivität:

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$.

de Morgansche Regeln: Wegen 1.3 (Negation von "und"/"oder") gilt auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2), \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

2.4 Die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.
Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

2.5 Die Potenzmenge

Ist M eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von M

$$\mathrm{Pot}(M) := \{N : N \subseteq M\}$$

die Potenzmenge von M (manchmal auch $\mathfrak{P}(M)$).

2.6 Das kartesische Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1, M_2, $\ldots$, M_n Mengen. Die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ gilt } x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben M^n, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

2.7 Die Mengen der reellen und komplexen Zahlen

Reelle Zahlen und Betrag

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen. Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a .

Beachte: Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden.

Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(1) $|a| \geq 0$; (2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
(4) $\pm a \leq |a|$ und $\Big(|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; (a \leq c \text{ und } -a \leq c)\Big)$;
(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung ;
(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ umgekehrte Dreiecksungleichung .

Die Menge der komplexen Zahlen

Wir betrachten eine Zahl i, mit $i^2 = -1$. Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der } \underline{\text{komplexen Zahlen}}.$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der Realteil von z (geschrieben $\operatorname{Re} z$) und y heißt der Imaginärteil von z (geschrieben $\operatorname{Im} z$). Komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re} z = 0$ heißen rein imaginär und komplexe Zahlen mit $\operatorname{Im} z = 0$ heißen reell.

Also: Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

Konjugation und Betrag Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die konjugierte komplexe Zahl . Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl z.

Rechenregeln: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \;,$$

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \text{ und } \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \text{ (Dreiecksungleichung) und } ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x + iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

3 Funktionen

3.1 Zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

Schreibweise $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ („f von X nach Y, x wird abgebildet auf $f(x)$").

Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. Man kann diesen mit der Funktion f identifizieren.

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt X Definitionsbereich und Y Wertebereich von f. Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ Bild von A unter f, und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B unter f. Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ Bild von f (Menge aller $y \in Y$, die von f getroffen werden).

Definition 3.1. *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(a) f heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(b) f heißt injektiv, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dh falls es zu jedem Element im Bild von f genau ein Urbild gibt.

(c) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

3.2 Komposition

Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert $g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$ eine Funktion $g \circ f$ ("g nach f"), die Hintereinanderausführung oder Komposition von f und g.

Satz 3.1. *Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist assoziativ.

3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion f^{-1}, die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von f.

Beachte: Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y ein solches x. Da f injektiv ist, ist dieses x eindeutig bestimmt. Somit ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion.

Bemerkung 3.1. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.*

Satz 3.2. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, so ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.*

Bemerkung 3.2. *Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Satz 3.3. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.*

4 Gründlichere Einführung der reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen . Wir führen diese Menge durch 15 Axiome ein, dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich **alle** weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an. Eine explizite Konstruktion (die natürlich möglich ist!), führen wir hier nicht durch.

4.1 Körperaxiome

Es gibt Verknüpfungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("plus", wir schreiben $a + b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("mal", wir schreiben ab oder $a \cdot b$) mit

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad & (A1) && (ab)c = a(bc) \quad (A5) \\ \exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad & (A2) && \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad (A6) \\ \forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 \quad & (A3) && \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \quad (A7) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad & (A4) && ab = ba \quad (A8) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac \quad & (A9) && \end{aligned}$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die Assoziativgesetze , $(A4)$ und $(A8)$ die Kommutativgesetze, und $(A9)$ ist das Distributivgesetz.

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

4.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung "$\leq$" gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &(A10) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a, \\ &(A11) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c, \\ &(A12) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b, \\ &(A13) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \\ &(A14) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc. \end{aligned}$$

$(A11)$ heißt Transitivität, $(A12)$ heißt Antisymmetrie. Außerdem beinhaltet $(A10)$ auch, dass $a \leq a$ gilt (Reflexivität).

$(A13)$ und $(A14)$ bedeuten, dass die Ordnung $\leq$ mit den Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" verträglich ist.

Schreibweisen: $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

Bemerkung 4.1. *Aus* $(A1) - (A14)$ *lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.*

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall,}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.
\end{aligned}$$

Weiter: $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$.

4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

M heißt <u>nach oben</u> [<u>unten</u>] <u>beschränkt</u> $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : x \leq \gamma$ $[x \geq \gamma]$.

In diesem Fall heißt γ eine <u>obere Schranke</u> (OS) [<u>untere Schranke</u> (US)] von M.

Eine obere Schranke [untere Schranke] γ von M mit $\gamma \in M$ heißt <u>Maximum</u> [<u>Minimum</u>] von M und wird mit $\max M$ [$\min M$] bezeichnet.

Wegen $(A12)$ sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz <u>eindeutig bestimmt</u>.

Definition 4.1. *Ist γ obere Schranke [untere Schranke] von M mit $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ $[\gamma \geq \tilde{\gamma}]$ für **jede** obere Schranke [untere Schranke] $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ <u>Supremum</u> [<u>Infimum</u>] von M (**kleinste** obere Schranke von M [**größte** untere Schranke von M]) und wird mit $\sup M$ [$\inf M$] bezeichnet.*

Nach $(A12)$ sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.2. *Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt $\sup M = \max M$ genau dann, wenn $\sup M \in M$ ist (entsprechend für $\min$ und $\inf$).*

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

$(A15)$ Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Folgerung 4.1. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Definition 4.2. *Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u> , falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Bemerkung 4.3. *M beschränkt* $\Leftrightarrow \exists\gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.

Satz 4.1. *Sei* $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$*. Dann gilt:*

(1) A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

(2) A nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow$ B nach oben [nach unten] beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ *[*$\inf B \geq \inf A$*].*

(3) Sei A nach oben [nach unten] beschränkt und γ eine obere Schranke [untere Schranke] von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A &\iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x \in A \text{ mit } x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A &\iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x \in A \text{ mit } x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

4.5 Natürliche Zahlen

Satz 4.2. *Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.*

(1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.
(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.
(3) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

4.6 Vollständige Induktion

Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{aligned} \text{Induktionsanfang } (IA) &\quad A(1) \\ \text{Induktionsschritt } (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \,. \end{aligned}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, ..., $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Varianten der Induktion: Man kann die Induktion auch bei z.B. $n = 5$ beginnen lassen. Zum Beweis von "$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5 : A(n)$" hat man dann zu zeigen:

$$\begin{aligned} (IA) &\quad A(5) \\ (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 : (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \,. \end{aligned}$$

Bei der <u>Abschnittsinduktion</u> zeigt man

$$\begin{aligned} (IA) &\quad A(1) \\ (IS) &\quad \forall n \in \mathbb{N} : (A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)) \,. \end{aligned}$$

4.7 Ganze und rationale Zahlen

Definition 4.3. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *Menge der ganzen Zahlen* und $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *Menge der rationalen Zahlen* .

Satz 4.3. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum.*

4.8 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (“}n\text{ über }k\text{”).}$$

Es gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n \geq k \geq 0$, $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

Lemma 4.1. *Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

4.9 Potenzen

Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(3) **Bernoullische Ungleichung** (BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

(4) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

Folgerung 4.2. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $a > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$. Ist $a \in (0,1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.*

4.10 Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$. Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, “n-te Wurzel aus a”.

Folgerung 4.3. *Für alle $a, b \geq 0$ gilt wegen 4.9 Rechenregel (4):*
$a \leq b \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, *und wegen* $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$ *gilt* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

5 Mehr über die komplexen Zahlen

Polarkoordinaten und Eulerformel: Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (wobei $x, y \in \mathbb{R}$) kann man schreiben mithilfe ihres Betrages $r = |z|$ und des Winkels φ zur positiven x-Achse (dh mithilfe von Polarkoordinaten). Es ist nämlich $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ nach Schulmathematik. Verwendet man die Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

so erhält man $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$. Multiplikation mit z dreht dann um den Winkel φ.

Sind sin und cos bekannt, so kann man die Eulerformel als Definition von $e^{i\varphi}$ verwenden.

5.1 Polynome

Ein Polynom p (oder $p(z)$) mit komplexen Koeffizienten ist ein formaler Ausdruck $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt reell , wenn alle Koeffizienten a_j reell sind.

Das Polynom heißt vom Grad n , falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich normiert , falls $a_n = 1$ ist.

Falls $a_n = 0$ ist, so ist auch $p(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, dh führende Nullkoeffizienten kann man weglassen.

Es gilt insbesondere

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten (in der "freien Variablen" z) bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[z]$.

Definition 5.1. *Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt Nullstelle des Polynoms p.*

5.2 Polynomdivision

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]\setminus\{0\}$ Polynome vom Grad n bzw. $k \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} m = n - k$ und $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < k$ und $p = mq + r$ (Division mit Rest).

Satz 5.1. *Ist $p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist z_0 Nullstelle von p, so gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n - 1$ mit*

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

Dabei heißt $z - z_0$ Linearfaktor.

Definition 5.2. *Die Vielfachheit (Vfh) einer Nullstelle z_0 von p gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann.*

Folgerung 5.1. *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

5.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung 5.2. *Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Eine feste Nullstelle z_0 von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.

5.4 Die Gleichung $z^n = c, c \in \mathbb{C}$

Um die Gleichung zu lösen schreibt man c in Polarkoordinaten ($c = re^{i\phi}$) und benutzt man den Folgenden Satz

Satz 5.2. *Die Lösungen von $z^n = re^{i\phi}$ sind: $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(2j\pi+\phi)}{n}}, j = 0, 1, ..., n-1$.*

6 Folgen und Konvergenz

Definition 6.1. *Eine reelle [komplexe] Zahlenfolge oder Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].*

Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n) oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Beispiele: (1) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

(2) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

(3) $a_n = i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots)$.

Der Begriff der *Konvergenz* ist für die Analysis von zentraler Bedeutung.

6.1 Konvergenz

Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{n_0}_{= n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: “die a_n kommen a beliebig nahe” oder “der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein”, wenn n groß genug ist.

Die Zahl a heißt dann Limes oder Grenzwert der Folge (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt konvergent , falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass (a_n) gegen a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent .

Schreibweisen: Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

Beispiele: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.2 (3) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Wir haben $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nachgewiesen.

(2) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze

$$\varepsilon := \begin{cases} 1/2, & \text{falls } a \in \{1, -1\} \\ 1/2 \cdot \min\{|1-a|, |-1-a|\}, & \text{falls } a \notin \{1, -1\} \end{cases} .$$

Dann gilt $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Folglich konvergiert (a_n) nicht gegen a. Da a beliebig war, ist (a_n) divergent.

Bemerkung 6.1. *(1) Für jede Zahlenfolge (a_n) und jedes a gilt:* $\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0$.

Insbesondere ist für $a = 0$: $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$.

(2) Für $b \in \mathbb{C}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1$.

Denn für $|b| \geq 1$ gilt $|b^n| = |b|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (b^n) konvergiert nicht gegen Null. Für $|b| < 1$ sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 4.2 finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 \leq |b^n| = |b|^n \leq |b|^{n_0} < \varepsilon$. Also ist $\lim_n b^n = 0$.

(3) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

(4) Eine konvergente Folge (a_n) ist beschränkt , dh die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(5) Ist (z_n) eine komplexe Zahlenfolge, so ist (z_n) genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen $(Re\, z_n)$ und $(Im\, z_n)$ konvergent sind. Genauer gilt für $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$z_n \to z_0 \iff Re\, z_n \to Re\, z_0 \text{ und } Im\, z_n \to Im\, z_0$$

Das liegt an der Abschätzung

$$\max\{|Re\, z_n - Re\, z_0|, |Im\, z_n - Im\, z_0|\} \leq |z_n - z_0| \leq |Re\, z_n - Re\, z_0| + |Im\, z_n - Im\, z_0|.$$

Konvergiert etwa (z_n) gegen $z_0 \in \mathbb{C}$, so zeigt die linke Ungleichung, dass $Re\, z_n \to Re\, z_0$ und $Im\, z_n \to Im\, z_0$. Konvergiert hingegen $(Re\, z_n)$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und $(Im\, z_n)$ gegen $b \in \mathbb{R}$, so setze $z_0 := a + ib$, und die rechte Ungleichung zeigt $z_n \to z_0$.

Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen.

(6) Zur Beruhigung: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$ mit $a_n \to a$, so gilt $a \in \mathbb{R}$. Wäre nämlich $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so hätte man für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a| \geq |Im\, a_n - Im\, a| = |Im\, a| =: \varepsilon > 0,$$

im Widerspruch zu $|a_n - a| \to 0$.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft für alle $n \geq n_0$ gilt.

***Beispiel:** Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n > 10000$.*

Sind eine Folge (a_n) und eine Zahl a gegeben, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } |a_n - a| < \epsilon \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bei Konvergenzfragen kommt es also auf endlich viele Folgenglieder nicht an.

Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ als Folge.

6.2 Grenzwertsätze

Seien (a_n), (b_n), (α_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \leq \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \Longrightarrow a \leq b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beweis. (1) ist leicht. Für (2) verwendet man $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ und (1).

Zu (3): Sonst wäre $a > b$, und mit $\varepsilon := (a - b)/2$ ist $a_n > a - \varepsilon \geq b + \varepsilon > b_n$ für fast alle n, Widerspruch.

Zu (4): Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für fast alle n: $|a_n - a| < \epsilon, |b_n - a| < \epsilon$, also $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$.

Zu (5): Sei $\varepsilon > 0$. Dann $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für fast alle n. Also

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für fast alle n. Bei $(a_n \cdot b_n)$ verwendet man

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

und die Tatsache, dass die konvergente Folge (a_n) beschränkt ist, dh es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt aus (1) und (5) für "+".

Die Aussage über $(\frac{a_n}{b_n})$ muss man nur für $a_n = 1$ zeigen. Sei dazu $b \neq 0$ und $\delta := |b|/2$. Dann ist $\delta > 0$ und wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt dann auch

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > 2\delta - \delta = \delta$$

und

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \leq \frac{1}{2\delta^2} \, |b_n - b|,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beispiele 1) Sei $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Dann $|a_n - 0| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$ und da $\frac{1}{n} \to 0$ bekommen wir mit Hilfe des Grenzwertsatzes 1), dass $a_n \to 0$.

2) Sei $c_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$. Dann $\frac{1}{n} \leq c_n \leq \frac{3}{n}$. Da aber $\frac{1}{n} \to 0$ und $\frac{3}{n}$ folgt aus dem Grenzwertsatz (4), dass $c_n \to 0$.

6.3 Monotone Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt

$$\begin{aligned} \underline{\text{monoton wachsend}}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}, \\ \underline{\text{monoton fallend}}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}, \\ \underline{\text{streng monoton wachsend}}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}, \\ \underline{\text{streng monoton fallend}}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}. \end{aligned}$$

Satz 6.1. *Ist eine monoton wachsende [bzw. fallende] reelle Folge (a_n) beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *[bzw.* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*].*

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend und $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$, also auch $|a_n - s| < \varepsilon$. □

6.4 Wichtige Beispiele

(1) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \geq 0$ gilt $\sqrt[p]{y} - \sqrt[p]{x} \leq \sqrt[p]{y-x}$. [Es ist nämlich nach dem binomischen Satz $(\sqrt[p]{y-x} + \sqrt[p]{x})^p = y - x + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} + x \geq y$.]

Wir erhalten somit $|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \sqrt[p]{|a_n - a|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $b_n := |a_n - a|$, so gilt $b_n \to 0$ und es reicht zu zeigen, dass $\sqrt[p]{b_n} \to 0$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $b_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann $0 \leq \sqrt[p]{b_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$: Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $a_n \geq 0$ für alle n, und für $n \geq 2$ gilt:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, a_n^2,$$

also $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}/\sqrt{n-1}$. Es folgt $a_n \to 0$.

Für $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$: Für $c \geq 1$ ist $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$ für fast alle n, und für $c \in (0,1)$ ist $1/\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{c} \leq 1$ für fast alle n. Wende nun den Grenzwertsatz (4) in 6.2 an.

(3) Konvergiert die Folge (a_n) so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to a$, und $a_{n+1} - a_n \to 0$ folgt aus dem Grenzwertsatz (5) in 6.2.

Es gilt aber auch z.B. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

woraus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ folgt, obwohl $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1-z)^{-1}$. Für $|z| \geq 1$ ist nämlich $|s_{n+1} - s_n| = |z|^{n+1} \geq 1$, und (s_n) konvergiert nicht (verwende (3)). Für $|z| < 1$ ist $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ nach Übungsaufgabe 2) in Blatt 3 und also $s_n \to (1-z)^{-1}$ nach Bemerkung 6.1 (2).

6.5 Teilfolgen

Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ Teilfolge (TF) von (a_n).

Beispiel: $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist Teilfolge von (a_n), hier ist $k(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(a_3, a_1, a_7, a_5, \ldots)$ ist hingegen keine Teilfolge von (a_n).

Eine Zahl b heißt Häufungswert (HW) der Folge (a_n) , falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

Beispiele: (1) Gilt $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen a, dh a ist einziger Häufungswert von (a_n).

(2) Die Folge $((-1)^n)$ hat genau die Häufungswerte 1 und -1: Wegen $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} \to -1$ sind 1 und -1 Häufungswerte. Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ und $\varepsilon := \min\{|1-b|, |-1-b|\}/2$, so ist $\varepsilon > 0$ und in $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ liegen keine Folgenglieder. Somit ist b kein Häufungswert von (a_n).

Satz 6.2 ((Bolzano-Weierstraß)). *Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.*

Bemerkung 6.2. *Der Satz gilt auch für komplexe Zahlenfolgen.*

6.6 Rechnen mit ∞

Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$
\begin{aligned}
a_n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\
a_n \to -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < K.
\end{aligned}
$$

Also $a_n \to \infty$ [$a_n \to -\infty$], falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ gilt, dass $a_n > K$ [$a_n < K$] für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Achtung: Man redet hier nicht von "Konvergenz" und auch nicht von "Grenzwert" , denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh ∞ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge a_n geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

Bemerkung 6.3. *(a) Gilt $a_n \to \pm\infty$, so folgt $|a_n| \to \infty$ und $1/a_n \to 0$. Ist $a_n > 0$ für alle n und $a_n \to 0$, so folgt $1/a_n \to \infty$.*

(b) Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von (a_n) mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].

(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge (a_n) gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.

Konventionen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a\cdot\infty = \infty$, $a\cdot(-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

Achtung: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

Regeln: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
a_n + b_n \to a + b, \quad &\text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\
a_n \cdot b_n \to a \cdot b, \quad &\text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.}
\end{aligned}
$$

Beachte, dass Bemerkung (a) oben das Verhalten von $(1/a_n)$ beschreibt.

Definition 6.2. *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.*

$$
\begin{aligned}
\sup M = \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\
\inf M = -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach unten beschränkt.}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 6.4. *Manchmal findet man auch $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$.*

Bemerkung 6.5. *Man hat also für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$:*

$$
\begin{aligned}
\sup M = \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x > K, \\
\inf M = -\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x < -K.
\end{aligned}
$$

6.7 Limes superior und Limes inferior

Sei (a_n) eine reelle Folge. Ist

$$A := \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \text{ es gibt Teilfolge von } a_k(n) \text{ mit } a_{k(n)} \to a\}$$

dann gilt immer $A \neq \emptyset$. A hat immer ein Maximum M und ein Minimum m, wobei, wenn z.B. $\infty \in A$ dann sagen wir $\max A := \infty$, also der Begriff des Maximums/Minimums hier erweitert den Begriff des Maximums/Minimums einer Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition 6.3. *Wir definieren* $\liminf a_n := m, \limsup a_n := M$.

Ist (a_n) nach beschränkt, dann ist

$$A = \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : a \text{ ist Häufungswert von } a_n\}.$$

Also ist $\liminf a_n$ [bzw. $\limsup a_n$] der kleinste [bzw. größte] Häufungswert von a_n.

Schreib- und Sprechweisen: Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "Limes superior" , entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ (" Limes inferior") .

Bemerkung 6.6. *Ist a_n eine Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann gilt*

$$a_n \to a \iff A = a \iff \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

Zusätzlich gilt: $a_n \to a \implies a_{k(n)} \to a$ für alle Teilfolgen $a_{k(n)}$ von a_n

Beispiel: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ die Häufungswerte $\{1, -1\}$ hat. Da Sie auch beschränkt ist, folgt, dass $\limsup a_n = 1$ und $\liminf a_n = -1$.

7 Reihen

7.1 Definition und Elementare Eigenschaften

Definition 7.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (<u>unendliche</u>) <u>Reihe</u> und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_N heißt <u>N-te Partialsumme</u> oder <u>N-te Teilsumme</u> von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt <u>konvergent</u> [<u>divergent</u>], falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert [bzw. divergiert]. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der <u>Reihenwert</u> von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Bemerkung 7.1. *(a) Die Folge (a_n) kann hier reell oder komplex sein. Ist (a_n) komplex, so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^\infty Re\, a_n$ Realteil der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty Im\, a_n$ heißt Imaginärteil von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.*

*(b) Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil **und** ihr Imaginärteil **beide** konvergieren. In diesem Fall ist $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty Re\, a_n + i \sum_{n=1}^\infty Im\, a_n$, also $Re\,(\sum_{n=1}^\infty a_n) = \sum_{n=1}^\infty Re\, a_n$ und $Im\,(\sum_{n=1}^\infty a_n) = \sum_{n=1}^\infty Im\, a_n$.*

Wichtige Beispiele: (1) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^\infty z^n = (1-z)^{-1}$.

(2) Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ist divergent.

Denn für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}}_{=s_N} + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}} \geq s_N + N\frac{1}{2N} = s_N + \frac{1}{2}.$$

Also ist (s_N) divergent, denn $s_N \to s \in \mathbb{R}$ würde $s_{2N} - s_N \to s - s = 0$ implizieren im Widerspruch zu $s_{2N} - s_N \geq 1/2$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Satz 7.1. *Seien (a_n) und (b_n) Folgen und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.*

*(1) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.*

(2) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=p+1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=p+1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^p a_n$.

(3) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und definiert man $r_N := \sum_{n=N+1}^\infty a_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, so gilt $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$, dh die "Reihenendstücke" konvergieren gegen Null.

(4) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so folgt $a_n \to 0$.

(5) Sind $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$), so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt $\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^\infty a_n + \beta \sum_{n=1}^\infty b_n$.

Beweis. (1) folgt aus Satz 6.1, angewandt auf die monoton wachsende Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

(2) Setzt man $\sigma_N := \sum_{n=p+1}^N a_n$ für $N \geq p+1$, so ist $\sigma_N = s_N - s_p \to \sum_{n=1}^\infty a_n - s_p$ $(N \to \infty)$.

(3) Wegen (2) gilt $r_N = \sum_{n=1}^\infty a_n - s_N \to \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^\infty a_n = 0$.

(4) Es ist $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ nach Bemerkung 6.6.

(5) folgt aus dem Konvergenzsatz (5) in 6.2. $\square$

BeispielDie Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}$ ist nach (4) divergent denn $|\frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}| = \frac{1}{100+\frac{1}{n}} \to 100 \neq 0$ also ist $\frac{(-1)^n}{100+\frac{1}{n}}$ keine Nullfolge (eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen Null konvergiert).

7.2 Absolut konvergente Reihen

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der a_n konvergiert).

Satz 7.2. *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt die "Dreiecksungleichung für Reihen":*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

7.3 Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. Für (1) verwende 7.1 (1). (2) folgt aus (1). □

7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Sei (b_n) eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, weil $\frac{1}{n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{(-1)^n}{n}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und das ist die harmonische Reihe, die divergent ist.

Bemerkung: Beachte, dass aus den Voraussetzungen folgt: $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Monotonie ist hier wichtig! Setzt man nur voraus, dass $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$, so ist die Aussage i.a. falsch (Beispiele in den Übungen).

7.5 Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 7.2. *Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung.Denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$, hingegen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent mit $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n^2} = \lim 1/(\sqrt[n]{n})^2 = 1$.*

Beweis. Ist $\alpha < 1$, so wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also $|a_n| \leq \beta^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\beta \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium.

Ist $\alpha > 1$, so wählen wir $\gamma \in (1, \alpha)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \gamma \geq 1$ für unendlich viele n, also $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $a_n \not\to 0$, und nach 7.1 (4) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. $\square$

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit dem Wurzelkriterium. Hier ist $a_n = n^p x^n$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^p |x| \to |x| \ (n \to \infty).$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ gilt $|a_n| = n^p \to \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ ist nach 7.1 (4) divergent.

7.6 Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 7.3. *Konvergiert (c_n) gegen α, so ist für $\alpha < 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Im Falle $\alpha = 1$ ist* ***keine*** *allgemeine Aussage möglich (man betrachte wieder $a_n = \frac{1}{n}$ bzw. $a_n = \frac{1}{n^2}$).*

Beweis. (1) Es sei $c_n \geq 1$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0$ für alle $n \geq n_0$, dh $|a_n| \not\to 0$. Nach 7.1 (4) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\alpha := \limsup c_n < 1$, so wähle $\beta \in (\alpha, 1)$. Es gilt dann $c_n \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dh wir finden n_0 mit $c_n \leq \beta$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$|a_n| \leq \beta |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \beta^{n-n_0} |a_{n_0}| = \beta^n (|a_{n_0}| \beta^{-n_0})$$

für alle $n \geq n_0$. Wegen $\beta \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und nach Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so folgt $c_n \geq 1$ für fast alle n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert nach (1). $\square$

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ denn

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

7.7 Die Exponentialreihe

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Definition 7.2. *Die Eulersche Zahl ist* $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Satz 7.3. *Es gilt* $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

7.8 Das Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 7.4. *Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$* ***absolut konvergent****, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

Beweis. Es reicht, den Fall $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ zu betrachten. Es gilt dann für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{2N} c_n,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut. Das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selber ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Nach dem Satz konvergiert diese Reihe absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7.9 Die Exponentialfunktion

Da die Exponentialreihe nach 7.7 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, E heißt die <u>komplexe Exponentialfunktion</u> .

(0) Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = e$

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

[Cauchyprodukt für $a_n = z^n/n!$ und $b_n = w^n/n!$; man hat dann

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

nach dem Binomialsatz, und 7.4 gibt die Behauptung.]

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

[Es ist $1 = E(0) = E(z + (-z)) = E(z)E(-z)$, woraus $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$ folgt. Der Rest folgt aus (1).]

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

[Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $E(x) \in \mathbb{R}$ klar und für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x > 1.$$

Also ist für $x < 0$ nach (2): $E(x) = E(-x)^{-1} \in (0, 1)$.]

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

[Ist $x < y$, so gilt nach (1) und (3):

$$E(y) = E(\underbrace{y - x}_{>0}) \underbrace{E(x)}_{>0} > E(x).]$$

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

[Für jedes $K > 0$ gilt $E(K) \geq 1 + K > K$ (woraus die erste Behauptung folgt) und also auch $0 \leq E(-K) = E(K)^{-1} < 1/K$, woraus die zweite Behauptung folgt.]

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

[Dies folgt aus der Definition, sowie der Tatsache, dass $w_n \to w$ für eine komplexe Folge (w_n) impliziert: $\overline{w_n} \to \overline{w}$.]

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x+iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.

[Die erste Gleichung folgt aus (1). Mittels (6), (1) und (0) gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$|E(iy)| = \sqrt{E(iy)\overline{E(iy)}} = \sqrt{E(iy)E(-iy)} = \sqrt{E(iy-iy)} = 1.]$$

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.

[Es gilt nach (2): $E(\frac{x}{n})^n = E(n\frac{x}{n}) = E(x)$.]

(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.

[Nach (6), (1) und (8) ist:

$$|E(z)| = \sqrt{E(z)\overline{E(z)}} = \sqrt{E(z+\overline{z})} = \sqrt{E(2\operatorname{Re} z)} = E(\operatorname{Re} z).]$$

Bemerkung und Definition: Wegen (2), (8) und 7.7 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Eine andere Bezeichnung ist $\exp(z) := E(z)$.

Wir zeigen noch die folgenden **Abschätzungen**:

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

Beweis. Es ist $E(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots$. Also

$$|E(h) - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{(n-1)!} = |h|E(|h|),$$

womit (10) gezeigt ist. Für $h \neq 0$ haben wir

$$|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h|E(|h|).$$

□

In der Vorlesung haben wir auch die Abschätzung

(12) Für alle $h \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$|E(h) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h^n}{n!}| \leq \frac{|h|^N}{N!} E(|h|).$$

Diese Abschätzung gibt (10) wenn $N = 1$ und (12) wenn $N = 2$.

Bemerkung und Definition: Wegen (2), (8) und 7.7 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ oder $\exp(z) := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

7.10 Sinus und Cosinus

Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots. \end{aligned}$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} E(iz) &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots \\ E(-iz) &= 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots. \end{aligned}$$

(2) **Eulerformel:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, also $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.

(4) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Abschätzungen:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \le |h| E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h| E(|h|)$.

Man kann die Exponentialfunktion e^z so definieren: $e^z = E(z)$.

7.11 Potenzreihen

Definition 7.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine* Potenzreihe (PR) um z_0 *hat die Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, *wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen* Koeffizienten *der Potenzreihe und z_0 heißt* Entwicklungspunkt.

Wir nennen eine Potenzreihe reell, *falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind.*

Fragen: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert eine gegebene Potenzreihe? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine reelle Potenzreihe?

Beispiele: Die Potenzreihen für exp, sin und cos konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist für $|z| < 1$ absolut konvergent und für $|z| \geq 1$ divergent.

Alle diese Reihen haben als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Bemerkung: Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert für $z = z_0$, dh im Entwicklungspunkt. Setzt man $z = z_0$ ein, erhält man nämlich $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = a_0$.

Definition 7.4. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist definiert durch*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Satz 7.5. $|z - z_0| < R \implies$ *Potenzreihe absolut konvergent.*
$|z - z_0| > R \implies$ *Potenzreihe divergent.*

Bemerkung: Im Falle $R = 0$ konvergiert die Potenzreihe also nur für $z = z_0$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Im Fall $R = \infty$ ist die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bemerkung: Im Fall $R \in (0, \infty)$ lässt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ keine allgemeine Aussage treffen:

(a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, sie divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius $R = 1$, für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist sie absolut konvergent.

Beispiele: (1) Die Potenzreihen für exp, sin, cos haben jeweils Konvergenzradius ∞.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, ebenso die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ mit $p \in \mathbb{N}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$.

Beweis des Satzes. Wir haben für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) |z - z_0|,$$

und die Behauptungen des Satzes folgen aus dem Wurzelkriterium. □

Satz 7.6. *(Konvergenzradius R über Quotienten): Sei $\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha$, wobei $0 \le \alpha \le \infty$, dann $R = \frac{1}{\alpha}$.*

Beweis. Das folgt aus dem Quotientenkriterium. □

Beispiel: Für die Exponentialreihe ist $a_n = 1/n!$, also $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{n+1} \to 0$ und $R = 1/0 = \infty$. Auf die Potenzreihen für sin und cos lässt sich der Satz nicht anwenden.

Bemerkung: Hier erlauben $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i.a. keine Entscheidung!

Beispiel: $a_n = (\frac{2+(-1)^n}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & , n \text{ ungerade,} \\ 1 & , n \text{ gerade.} \end{cases} \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 3^n & , n \text{ ungerade,} \\ 3^{-n-1} & , n \text{ gerade.} \end{cases},$$

also $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, aber der Konvergenzradius ist $R = 1$.

8 Stetigkeit

8.1 Limes, Definition der Stetigkeit, Kriterien für Stetigkeit

Definition 8.1 (Limes)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y,$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Bemerkung 8.1. *Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn $f : D \to \mathbb{R}$, mit D Intervall oder endliche Vereinigung von Intervallen [1]. In diesem Fall muss $0 < |x - x_0| < \delta$ durch $x \in D$ und $0 < |x - x_0| < \delta$ ersetzt werden. Im Rest der Vorlesung ist mit D eine solche Menge gemeint. Der Limes kann auch für kompliziertere Mengen definiert werden, aber wir führen hier die Definition nicht ein.*

[1] Hier das Intervall $[a, a] = \{a\}$ ist nicht zu berücksichtigen

Definition 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$* [2]*. f heißt stetig in x_0, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig, falls sie stetig in y ist $\forall y \in D$.

Beispiel: Die Exponentialfunktion e^z ist stetig. In der Tat sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann $|e^z - e^{z_0}| = |e^{z_0}||e^{z-z_0} - 1| \leq |e^{z_0}||e^{z-z_0}||z - z_0|$, wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaft 10) der Exponentialreihe in 7.9 benutzt haben. Da aber nach der Eigenschaft 9 der Exponentialfunktion, $|e^{z-z_0}| = |e^{Re(z-z_0)}|$ bekommen wir $|e^{z-z_0}| \leq e^{|z-z_0|} \leq e$, wenn $|z - z_0| \leq 1$. Also $|e^z - e^{z_0}| =\leq |e^{z_0}|e|z - z_0|$, wenn $|z - z_0| < 1$ was zeigt, dass $\lim_{z \to z_0} e^z = e^{z_0}$.

Satz 8.1. *(i) Alle folgenden Funktionen sind stetig: Polynome, sin, cos, Exponentialfunktion.*
(ii) f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ $\implies$ $g \circ f$ ist stetig in x_0.
(iii) wenn f, g stetig in x_0, dann $f + g, f \cdot g$ sind stetig in x_0. Wenn dazu $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Beispiel Die Funktion $e^{x^2+x+10} \sin(\frac{x^2+x+1}{x-1})$ ist stetig für alle $x \neq 1$ als Produkt, Quotient, Komposition stetiger Funktionen.

Satz 8.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \lim f(x_n) = y, \text{ für alle Folgen in } D/\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0.$$

Beispiel Sei $f : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos(1/x)$. Der Limes $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, da $a_n := \frac{1}{2\pi n} \to 0$, $b_n := \frac{1}{2\pi n + \pi} \to 0$ aber $f(a_n) = \cos(2\pi n) = 1 \to 1$ und $f(b_n) = \cos(2\pi n + \pi) = -1 \to -1$.

8.2 Zwischenwertsatz

Satz 8.3 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ $[f(a) > c > f(b)]$ dann $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = c$.*

Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall.

Beweis der Folgerung. Seien $c, d \in f(I)$ mit $c < d$. Sei $y_0 \in [c, d]$. Wir finden $a, b \in I$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = y_0$. Somit ist $y_0 \in f(I)$, und $[c, d] \subseteq f(I)$ ist gezeigt. □

[2] Der Begriff der stetigen Funktion kann für D eine beliebige nicht leere Teilemge von $\mathbb{R}$ eingeführt werden (und nicht nur für endliche Verreinigung von Intervallen). Hier führen wir aber diese Definition nicht ein.

Beispiel: Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom von ungeradem Grad m, so gilt $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen des Zwischenwertsatzes reicht es zu zeigen, dass $p(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und dass $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Die Behauptungen sind klar für $m = 1$. Sei also $m \geq 3$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Für $x \geq 1 + |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gilt dann

$$\begin{aligned} p(x) &\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-2} - \ldots - |a_1|x - |a_0| \\ &\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-1} - \ldots - |a_1|x^{m-1} - |a_0|x^{m-1} \\ &\geq x^{m-1} \underbrace{(x - (|a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|))}_{\geq 1} \\ &\geq x^{m-1} \to \infty \quad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Die Aussage für $x \to -\infty$ zeigt man ähnlich. □

8.3 Einseitige Grenzwerte

Definition 8.3 (Einseitige Grenzwerte)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = y \quad [\textit{bzw.} \lim_{x \to x_0-} f(x) = y],$$

wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass $x_0 < x < x_0 + \delta$ [bzw. $x_0 - \delta < x < x_0$] $\implies |f(x) - y| < \epsilon$. In diesem Fall heißt y rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von f in x_0.

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}$. Dann gilt $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$.

Satz 8.4. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0-} f(x) = y \textit{ und } \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \right).$$

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}$. Wie im letzten Beispiel. Da $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$, existiert der Limes $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Bemerkung 8.2. *Die Definition und der Satz oben sind anwendbar für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$, wenn es sinnvoll ist, $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ zu betrachten.*

Bemerkung 8.3. *Man kann $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ mit $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ betrachten. Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von folgen, und die Intuition ist die gleiche.*

8.4 Monotone Funktionen

Definition 8.4. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt* monoton wachsend *[bzw.* monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

f heißt streng monoton wachsend *[bzw.* streng monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

f heißt monoton*, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist, und f heißt* streng monoton*, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beispiele: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht monoton.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend, aber *nicht streng* monoton wachsend.

Satz 8.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(a) Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(b) Ist f zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beispiele kommen in den nächsten Kapiteln.

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (Exponentialfunktion) ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Definition 9.1 (Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (*natürlicher*)* Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*, d.h. also* $\ln x := \exp^{-1}(x)$ *für* $x \in (0, \infty)$*.*

Eigenschaften: ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$, sowie $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \exp(\ln x + \ln y) &= \exp(\ln x) \exp(\ln y) = xy = \exp(\ln(xy)), \\ \exp(\ln x - \ln y) &= \exp(\ln x) \exp(-\ln y) = x \exp(\ln y)^{-1} = x/y = \exp(\ln(x/y)). \end{aligned}$$

Beispiel $\ln(6) = \ln(3) + \ln(2)$, $\ln(5x) = \ln(5) + \ln(x)$.

Definition 9.2 (Die allgemeine Potenz)**.** *Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:*

$$a^x := \exp(x \ln a) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv.

Eigenschaften: Für $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a^x > 0$;

(2) die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (wegen als Komposition stetiger Funktionen siehe);

(3) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$;

(4) $a^{-x} = e^{-x \ln a} = (e^{x \ln a})^{-1} = (a^x)^{-1} = 1/a^x$;

(5) $\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$;

(6) $(a^y)^x = e^{x \ln(a^y)} \overset{(5)}{=} e^{xy \ln a} = a^{xy}$.

(7) $(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x$, wobei wir in der zweiten Gleichheit benutzt haben, dass $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Sei $a > 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, deshalb besitzt sie eine Umkehrfunktion.

Definition 9.3 (Der allgemeine Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion von a^x bezeichnet durch $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt* Logarithmus zur Basis a. *Es ist also $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a^{\log_a y} = y$ für alle $y \in (0, \infty)$.*

Satz 9.1. *Für alle $y \in (0, \infty)$ gilt $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.*

Denn $a^{\frac{\ln y}{\ln a}} = \exp(\frac{\ln y}{\ln a} \ln a) = \exp(\ln y) = y$.

Beispiel $\log_{10} x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Satz 9.2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein Minimum und ein Maximum in $[a, b]$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

Bemerkung 9.1. *Die Aussage des Satzes gilt auch, wenn [a,b] durch $\cup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ ersetzt wird, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \leq b_j$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.*

Bemerkung: Die Annahme, dass das Intervall geschlossen ist, ist sehr wichtig. Ohne diese Annahme, kann die Aussage des Satzes falsch sein. Z.B $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig aber $f((0, 1)) = (1, \infty)$. Also ist das Bild des Intervalls $(0, 1)$ unter f keine beschränkte Menge und hat kein Maximum oder Minimum.

Zusätzliche Eigenschaften von Sinus und Cosinus

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(ii)$\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$;
(iii) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).
(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; (v) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Nullstellen von sin und cos:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$.

Beispiele $\cos(3\pi/4) = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin(3\pi/4) = \sin(\pi - \pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$.

$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Arcussinus, Arcuscosinus, Tangens, Arcustangens

Arcuscosinus Die Funktion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arccos* $: [-1,1] \to [0,\pi]$ und sie heißt Arcuscosinus.

Aus dem Satz 8.5 folgt, dass arccos stetig und streng monoton fallend ist.

Arcussinus Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arcsin* $: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und sie heißt Arcussinus.

Beispiele $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, da $\frac{\pi}{6} \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, da $\frac{3\pi}{4} \in [0,\pi]$ und $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tangens Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*. (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)

Beispiel $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Arcustangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ und sie heißt *Arcustangens.*

Beispiel $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ da $-\pi/3 \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $\tan(-\pi/3) = -\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$.

Anwendung (Polarkoordinaten) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\phi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* z und $\phi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Wie wird $\arg z$ **bestimmt?** Wenn z=a+bi, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$, dann $\phi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\phi = sgn(b)\pi/2$ für $a = 0$ ($sgn(b) = \frac{b}{|b|}$), sowie $\phi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\phi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

Beispiele $arg(1 + \sqrt{3}i) = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1})$, da $\sqrt{3}, 1 > 0$. Also $arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$.

$arg(-1 - \sqrt{3}i) = -\pi + \arctan(\sqrt{3})$, da $-1, -\sqrt{3} < 0$.

Also $arg(-1 - \sqrt{3}i) = -\pi + \pi/3 = -2\pi/3$.

10 Differentialrechnung

10.1 Differentiarbarkeit

Im Rest des Kapitels ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall [3].

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Definition 10.1. *f heißt in $x_0 \in I$* differenzierbar *(**dbar**), falls der Limes $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert heißt* die Ableitung von f in x_0. *Bezeichnung: $f'(x_0)$.*

Die Funktion f heißt auf I differenzierbar*, falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.*

Bemerkung 10.1. *Es ist* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Beispiele: (1) $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, ist auf I differenzierbar mit $f' = 0$ auf I.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar, denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & , h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ nicht.

(3) $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \neq x_0$ ist nämlich nach Kapitel 4.9 Gleichung (1)

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \to nx_0^{n-1} \ (x \to x_0).$$

Satz 10.1. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

[3] Aber kein Intervall der Form [a,a]={a}.

10.2 Ableitungsregeln

Satz 10.2 (Abbleitungsregeln). *(a) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J := I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{Quotientenregel.}$$

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \text{Kettenregel.}$$

Beweis. [Beweis der Kettenregel] Die Idee ist zu schreiben

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da man dabei eventuell durch Null dividiert, setzen wir

$$q : J \to \mathbb{R}, q(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}.$$

Dann gilt $q(y) \to g'(y_0)$ für $y \to y_0$, also auch $q(f(x)) \to g'(f(x_0))$ für $x \to x_0$, da f in x_0 stetig ist. Außerdem gilt $g(y) - g(y_0) = q(y)(y - y_0)$ für **alle** $y \in J$, also

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = q(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (x \to x_0).$$

□

Beispiel: Sei $a > 0$ und $h(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist h auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h'(x) = (a^x)' = a^x \ln a,$$

da $a^x = e^{x \ln a}$, also wegen der Kettenregel $(a^x)' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

Satz 10.3 (Satz über die Umkehrfunktion). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Nach Satz 8.5 ist $f(I)$ ein Intervall. Sei $y \in f(I)$ und $x := f^{-1}(y)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y \to y_0),$$

da wegen der Stetigkeit von f^{-1} aus $y \to y_0$ folgt $x \to x_0$. □

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $g(x) = \ln(x)$. Dann $g(x) = f^{-1}(x)$, wobei $f(x) = e^x$. Also $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln(x))}$. Da aber $f'(x) = e^x$, bekommen wir

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Definition 10.2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum *[bzw.* Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{ bzw. } f(x) \geq f(x_0)].$$

Ein relatives *oder* lokales Extremum *ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum* [4]*.*

Bemerkung 10.2. *Ein Extremum (Maximum oder Minimum) einer Funktion, ist auch ein lokales Extremum der Funktion.*

Satz 10.4. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis des Satzes. Wir nehmen an, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat (sonst betrachte $-f$). Wir können weiter annehmen, dass das δ aus der Definition 10.2 mit dem δ aus dem Satz übereinstimmt (sonst betrachte das Minimum von beiden). Für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt dann $f(x) \leq f(x_0)$, also $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ und damit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, woraus $f'(x_0) \geq 0$ folgt. Also $f'(x_0) = 0$. □

Korollar 10.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn f differentierbar ist auf (a, b), dann*

$$\max f := \max f([a, b]) = \max f(\{a, b\} \cup A)$$

$$\min f := \min f([a, b]) = \min f(\{a, b\} \cup A),$$

wobei $A = \{x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\}$.

[4] In dieser Definition kann I ersetzt werden durch eine Menge die kein Intervall ist.

10.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 10.5. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)*** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerungen des Mittelwertsatzes Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

(1) f ist auf I konstant $\Leftrightarrow f' = 0$ auf I.

(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

Beweis. (1) "$\Leftarrow$": Nach MWS ist $f(b) = f(a)$ für alle $a, b \in I$.

(2) Wende (1) an auf $f - g$.

(3) Ist $f' \geq 0$ auf I, so gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$$

für ein $\xi \in (x, y)$. Es folgt $f(y) \geq f(x)$. Die anderen Aussagen beweist man analog. □

Anwendung: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\phi' = a\phi$ auf I, sowie $x_0 \in I$. Dann gilt $\phi(x) = \phi(x_0)e^{a(x-x_0)}$ für jedes $x \in I$: Setzt man $\psi(x) := \phi(x)e^{-ax}$, $x \in I$, so ist nämlich ψ differenzierbar auf I mit $\psi' = 0$ auf I, und somit

$$\phi(x)e^{-ax} = \psi(x) = \psi(x_0) = \phi(x_0)e^{-ax_0} \text{ für jedes } x \in I.$$

Somit hat für feste $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y' = ay \;\text{ auf } I, \quad y(x_0) = c,$$

genau eine differenzierbare Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\phi(x) = ce^{a(x-x_0)}$, $x \in I$.

10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (**dbar**).

Definition 10.3. *(a) f heißt in $x_0 \in I$* zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. Ableitung von f in x_0*.*

f heißt auf I zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$* zweite Ableitung von f auf I*.*

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. f''', $f^{(4)}, \dots$

Definition 10.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt* auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \dots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.*

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung 10.3. *Wenn eine Funktion differentierbar ist, dann ist die Abbleitung nicht unbedingt eine stetige Funktion.*

Beispiel 10.1: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f \in C^n(I)$ mit $f^{(n)}$ auf I differenzierbar. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Ist $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$ und $f(b) = 0$ dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Lösung: Wir werden das zeigen mit Hilfe des Mittelwertsatzes und mit Induktion in n. Wir zeigen das erst für $n = 0$. Für $n = 0$ gilt $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ ($f^{(0)} := f$) also wegen des Mittelwertsatzes gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ (da $f(a) = f(b)$). Also stimmt die Aussage für $n = 0$.

Wir nehmen, dass die Aussage stimmt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i.e. ist $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$ dann gibt es $d \in (a, b)$ mit $f^{(n+1)}(d) = 0$. Wenn aber zusätzlich $f^{(n+1)}(a) = 0$ und $f^{(n+1)}$ dbar ist auf I dann gibt es $c \in (a, d) \subset (a, b)$ mit $(f^{(n+1)})'(c) = \frac{f^{(n+1)}(d)-f^{(n+1)}(a)}{d-a} = 0$ oder $f^{(n+2)}(c) = 0$ was zu zeigen war. Also stimmt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 10.6 (10.12 Satz von Taylor)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differentierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom } T_n(f;x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{n\text{-tes Restglied } R_n(f,x_0)(x)} . \end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Es reicht den Fall $x_0 = 0$, $x > 0$ zu betrachten. Wir definieren $g : [x_0 = 0, x] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k - m \frac{y^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei wir $m \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $g(x) = 0$ ist. Man kann überprüfen mit Hilfe der Definition von g, dass $g(0) = ... = g^{(n)}(0) = 0$. Aus dem Beispiel 10.1 folgt, dass es ein $\xi \in (0, x)$ gibt, mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Aber aus der Definition von g folgt, dass $g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - m$ also $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Das bedeutet, dass

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Da aber $g(x) = 0$ folgt die behauptete Gleichung.

□

Beispiel: Wir betrachten $f(x) := \ln(1-x)$ für $x < 1$ und $x_0 = 0$. Hier ist $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ und also für jedes $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$. Wir erhalten somit für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(f;0)(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}, \quad x < 1.$$

Das Restglied ist hier

$$-\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Da ξ zwischen 0 und x liegt, erhalten wir $0 < \frac{x}{1-\xi} \leq \frac{x}{1-x} \leq 1$ für $x \in (0, \frac{1}{2}]$ und $0 \leq |\frac{x}{1-\xi}| \leq |x| \leq 1$ für $x \in [-1, 0]$. Somit geht das Restglied für $n \to \infty$ zumindest für $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ gegen Null, und

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1, \frac{1}{2}].$$

(Tatsächlich gilt dies auch für $x \in (1/2, 1)$). Wir notieren als Spezialfall ($x = -1$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.$$

Definition 10.5. *Falls $f \in C^\infty(I)$, heißt die Potenzrreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylorreihe der Funktion f.*

Korollar 10.2. *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $x_0 \in I$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f;x_0)(x) \to f(x) \quad \forall x \in I \qquad (\text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) \quad \forall x \in I),$$

genau dann wenn $R_n(f, x_0)(x) \to 0$ für jedes $x \in I$

Wenn die Aussagen des Korollars gelten, ist die Funktion durch ihre Taylorreihe darstellbar.

Warnung: Nicht jede Funktion $f \in C^\infty(I)$ ist durch ihre Taylorreihe darstellbar!

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$, in $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, also auch $T_n(f;0)(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Für **kein** $x > 0$ gilt somit $T_n(f;0)(x) \to f(x)$!

Satz 10.7 (10.13 Folgerung des Taylorsatzes)**.** *Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ mit x_0 kein Randpunkt von I. Weiter sei*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so hat f in x_0 ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].

(b) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis. $f^{(n)}$ ist stetig auf I mit $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, somit gibt es $\delta > 0$ mit

$$f^{(n)}(\xi) f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \text{für alle } \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I.$$

Nach dem Satz von Taylor und der Voraussetzung gibt es für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Nun betrachte man das Vorzeichen der rechten Seite. □

Beispiel: Sei $p > 1$, $\alpha > 0$. Bestimme das Maximum von $f(x) := \alpha x - x^p/p$ über $x \geq 0$.

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Für $x > 0$ ist $f'(x) = \alpha - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} < 0$. Weiter ist $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \alpha^{1/(p-1)}$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(\alpha^{1/(p-1)}) = (1 - \frac{1}{p})\alpha^{p/(p-1)} > 0$. Dies ist das gesuchte Maximum.

Bemerkung 10.4. *Allgemeiner sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf I [bzw. mit $f'' \leq 0$ auf I]. Solche Funktionen heißen* konvex *[bzw.* konkav*]. Es gilt dann:*

> Ist $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein globales Minimum [bzw. ein globales Maximum].

Es ist dann nämlich f' auf I nach der Folgerung (3) des Mittelwertsatzes monoton wachsend, also $f' \leq 0$ links von x_0 und $f' \geq 0$ rechts von x_0, dh (wieder nach der Folgerung (3) des Mittelwertsatzes) also f monoton fallend links von x_0 und monoton wachsend rechts von x_0. Wir erhalten so $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.

Außerdem ist $f \in C^2(I)$ konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

dh wenn die Funktion auf jedem Teiliintervall $[x, y]$ unterhalb der Geraden durch $f(x)$ und $f(y)$ liegt.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ ist in $C^2(\mathbb{R})$ mit $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x > 0$. Die Funktion f ist konvex und hat bei der einzigen Nullstelle $x_0 = 0$ von f' ein globales Minimum. Da $f(0) = 0$ bekommen wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und deshalb $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.5 Die Regeln von de l'Hospital

Satz 10.8 (10.11 **Die Regeln von de l'Hospital**). *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

(a) Ist $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(b) Ist $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bemerkung 10.5. *Ähnliche Aussage gilt, wenn man (a, b) durch (b, a) ersetzt. In diesem Fall kann $b = -\infty$ anstatt $b = \infty$ betrachtet werden.*

Beispiele: (1) Für $a, b > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $\frac{0}{0}$.

(2) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

(3) Es ist

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

Der Ursprüngliche Limes war hier der Form $0(-\infty)$, und wir haben ihn in der Form $\frac{-\infty}{\infty}$ umgeschrieben, und dann l'Hospital angewandt.

(4) Aus (3) folgt mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

Bemerkung: Hier ist es jeweils so, dass erst die Existenz des letzten Limes die Existenz des ersten Limes garantiert.

10.6 Ableitung von Potenzreihen

Satz 10.9 (Ableitung von Potenzreihen). *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Dann ist f auf I differentierbar (insbesondere stetig), und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I.$$

Beispiel: Für $x \in (-1,1)$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist 1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ist ebenfalls 1. Setzt man

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1),$$

so ist g nach Satz 10.9 auf $(-1,1)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \arctan'(x), \quad x \in (-1,1).$$

Wegen $\arctan 0 = 0 = g(0)$ und wegen der Folgerung (2) des Mittelwertsatzes gilt

$$\arctan(x) = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Eine ähnliche Argumentation zeigt

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

11 Integration

Im Rest der Vorlesung sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. das Bild $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ von f ist beschränkt.

11.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

Definition 11.1. *$Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt eine Zerlegung von $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$I_j \;:=\; [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j).$$

In Einfachen Worten I_j ist das j-te Intervall der Zerlegung, $|I_j|$ die Länge des Intervalls m_j der Kleinste Wert von f in I_j (oder infimum der Werte, wenn es den kleinsten Wert nicht gibt) und M_j der größte Wert von f in I_j (oder infimum der Werte, wenn es den kleinsten Wert nicht gibt)

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j|I_j| \left[S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j|I_j|\right]$ heißt Untersumme [Obersumme] von f bzgl. Z.

Sei $m := \inf f([a, b])$ und $M := \sup f([a, b])$.

Satz 11.1. *Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen.*

(1) Es gilt $m(b - a) \leq s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \leq M(b - a)$.

(2) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, so gilt $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2) \leq S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$.

Definition 11.2. $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a, b]\}$(*unteres Integral von f über* $[a, b]$)

$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a, b]\}$(*oberes Integral von f über* $[a, b]$).

Es gilt $m(b - a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b - a)$.

Für Beispiele siehe den nächsten Absatz.

11.2 Riemann Integrierbarkeit, Riemann Integral

Definition 11.3 (11.2)**.** *f heißt (Riemann-)*integrierbar *(*ib*) , falls $s_f = S_f$ gilt.*

In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

*das (Riemann-)*Integral *von f über* $[a, b]$.

Beispiele: (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Dann ist $m = M = c$ und aus Satz 11.1 (1) folgt $s_f = S_f = c(b-a)$. Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(2) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ist $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$ und sind m_j, M_j, I_j wie oben, so haben wir $m_j = 0$, $M_j = 1$ für alle j [5], also $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$. Folglich ist

$$s_f = 0 \neq 1 = S_f,$$

und f ist nicht integrierbar über $[0,1]$.

(3) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x$. Wir betrachten die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann

$$S_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

wobei die zweite Gleichheit gilt einfach, weil $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Die erste Gleichheit gilt weil $\frac{1}{n}$ die Länge des Intervalls $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist und $\frac{k}{n} = \sup_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} f(x)$. Daraus und aus der Definition von S_f folgt, dass $S_f \leq \inf_{n \in N} S_f(Z_n) = \inf_{n \in N} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Ähnlich bekommt man

$$s_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k-1}{n} = \frac{n-1}{2n}.$$

und deshalb $S_f \geq \sup_{n \in N} S_f(Z_n) = \sup_{n \in N} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$. Also $s_f \leq S_f \leq \frac{1}{2} \leq s_f$ deshalb $S_f = s_f = \frac{1}{2}$ und aus diesem Grund ist f integrierbar auf $[0,1]$ und $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(4) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x^2$. Wir betrachten wieder die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann

$$S_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},$$

wobei die zweite Gleichheit gilt einfach, weil $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (zeigen Sie das mit Induktion!). Die erste Gleichheit gilt weil $\frac{1}{n}$ die Länge des Intervalls $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist und $(\frac{k}{n})^2 = \sup_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} f(x)$. Daraus und aus der Definition von S_f folgt, dass $S_f \leq \inf_{n \in N} S_f(Z_n) = \inf_{n \in N} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

[5] Hier wird benutzt, dass jedes Intervall (mit mindestes zwei Punkten) rationale und irrationale Zahlen enthält.

Ähnlich bekommt man

$$s_f(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

und deshalb $s_f \geq \sup_{n\in N} S_f(Z_n) = \sup_{n\in N} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$. Also $s_f \leq S_f \leq \frac{1}{3} \leq s_f$ deshalb $S_f = s_f = \frac{1}{3}$ und aus diesem Grund ist f integrierbar auf $[0,1]$ und $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Definition 11.4. $R[a,b] := \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g$ *beschränkt und integrierbar*$\}$

Für eine Zerlegung Z, definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \ldots, n\} \text{ (\underline{Feinheit von } \underline{Z}).}$$

In Einfachen Worten ist $\|Z\|$ die Länge des größten Intervalls der Zerlegung. Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt passender Zwischenvektor, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt. Für einen solchen ξ heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine Riemannsche Summe . Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \leq \sigma_f(Z,\xi) \leq S_f(Z)$.

Satz 11.2 (11.7)**.** *Sei* $f \in R[a,b]$ *und* $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Zerlegungen mit* $\|Z_l\| \to 0$, *sowie* $(\xi^{(l)})$ *eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_f(Z_l, \xi^{(l)}) = \int_a^b f\, dx.$$

Bemerkung 11.1. *Der Satz beschreibt wie ein Integral approximiert werden kann (z.B. mit Computer). Das ist nützlich, wenn es unmöglich ist das Integral explizit zu berechnen.*

Beispiel: (i) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Wir werden sehen, dass $f \in R[0,1]$. Sei $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dann ist die Folge $\xi^{(n)} = \{\frac{1/2}{n}, \frac{3/2}{n}, \frac{5/2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\}$ eine Folge passender Zwischenvektoren. Die Zugehörigen Riemannschen Summen sind $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{(k-1/2)^2}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$ (zeigen Sie das mit Induktion!). Bemerkbar ist das der Fehler der Approximation $\frac{1}{12n^2}$ deutlich kleiner ist als der Fehler der Approximation mit den Ober und Untersummen, die im vorherigen Beispiel berechnet wurden.

11.3 Eigenschaften des Riemann Integrals

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a,b]$ dann $f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f\, dx = c(b-a)$. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar, d.h. $f \in R[a,b]$.

Seien $f, g \in R[a,b]$. Dann

(1) Gilt $f \le g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$.
(2) $fg \in R[a,b]$ und für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

(3) $|f| \in R[a,b]$ und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).

(4) Wenn $a < c < b$ dann $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.

Im Rest des Kapitels ist I ein Intervall.

Definition 11.5 (11.11)**.** *Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine* Stammfunktion von f auf I.

Beispiel: Seien $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $f(x) = e^x \cos(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + 5$. Dann folgt aus der Produktregel, dass $g'(x) = f(x)$ auf $\mathbb{R}$. Also ist g eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$.

11.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Partielle Integration, Integration durch Substitution

Satz 11.3 (11.10 **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
(1) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$.
(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \;\left(=: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b \right).$$

Beweis. (2) folgt aus (1). Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$ gilt wegen $h^{-1}\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dx = 1$:

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot |h|\varepsilon \le \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiele: (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) := x^n$ sowie $G(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist G auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Für $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist $f \in R[a,b]$. Definiert man

$F = \int_a^x f(t)dt$, so ist F auf $[a,b]$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a,b]$. Nach der Folgerung (2) des Mittelwertsatzes ist $G - F$ konstant, also

$$\int_a^b x^n\, dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

(ii) Da $(\frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)))' = e^x \cos(x)$, bekommen wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) = \left(\frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x))\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{\pi/2}(\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2))\right) - \left(\frac{1}{2}e^0(\cos(0) + \sin(0))\right) = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

Für eine Stammfunktion von f schreibt man auch $\int f(x)dx$ (unbestimmtes Integral) .

Satz 11.4 (**Partielle Integration**). *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g\, dx = fg - \int fg'\, dx \quad \textit{auf } I.$$

Ist $I = [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$

Beweis. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ auf I. Somit hat $f'g + fg'$ die Stammfunktion fg auf I, woraus die Behauptungen folgen (für die zweite Formel verwenden wir den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). $\square$

Beispiele: (1) $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\, dx = \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{e^x}_{f}\, dx = xe^x - e^x.$

(2) $\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\, dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\, dx = x\ln x - x.$

Satz 11.5 (11.13 **Integration durch Substitution**). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a, b \in I$ $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$. Ist F eine Stammfunktion von f auf I dann gilt*

(i) $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u(b)) - F(u(a))$.

Beweis. Wähle eine Stammfunktion F von f auf I. Dann ist $G := F \circ u$ eine Stammfunktion von $h := (f \circ u) \cdot u'$ auf J (denn $G' = (F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'$). Also ist

$$\int (f \circ u)(x) \cdot u'(x)\, dx = G(x) + c = F(u(x)) + c$$

auf I. Nun müssen wir den Hauptsatz der Differential und Integral Rechnung anwenden. $\square$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für die Ableitung y' auch $\frac{dy}{dx}$. In $\int f(x)\, dx$ substituiere nun $x = g(t)$, dh fasse x als Funktion von t auf. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ und man erhält (formal!) "$dx = g'(t)\, dt$" (dies ist nur eine Schreibweise, da "dx" oder "dt" hier **keine mathematische Bedeutung** tragen).

Beispiele: (1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\, dx$, substituiere $t = e^x$, also $x = \ln t$. Dann ist $dx = dt/t$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 1 \to e$. Wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\, dx = \int_1^e (1 + t^{-2})\, dt = (t - t^{-1})|_1^e = e - 1/e.$$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$, das ist der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit Radius 1. Substituiere $x = \sin t$. Dann ist $dx = \cos t\, dt$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 0 \to \pi/2$. Wir erhalten

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 t}}_{=\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt,$$

da $\cos \geq 0$ auf $[0, \pi/2]$ ist. Nun schreiben wir

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1,$$

also $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} 1\, dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\, dt}_{=0} \Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1 is also π.

(3) $\int xe^{-x^2}\, dx$, substituiere $u = x^2$, also $2x\, dx = du$ bzw. $x\, dx = \frac{du}{2}$. Dann ist

$$\int xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int e^{-u}\, du\Big|_{u=x^2} = -\frac{1}{2} e^{-u}\Big|_{u=x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Mittels partieller Integration kann man nun berechnen:

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \int \underbrace{x^2}_{g} \cdot \underbrace{xe^{-x^2}}_{f'}\, dx = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Man kann auf diese Weise Stammfunktionen bestimmen von $x^n e^{-x^2}$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Für gerade $n \in \mathbb{N}$ gibt es diese Stammfunktionen nicht in geschlossener Form.

(4) $\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$, substituiere $e^x = y$, also $x = \ln y$ und $dx = \frac{dy}{y}$, wobei man $y > 0$ beachte:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{(1+y)y}\, dy\Big|_{y=e^x}.$$

Zur Umformung des Integranden macht man den Ansatz

$$\frac{1}{(1+y)y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}.$$

Multipliziert man mit y und setzt $y = 0$, so erhält man $A = 1$. Multipliziert man mit $1 + y$ und setzt $y = -1$, so erhält man $B = -1$. Das ist ein Spezialfall der Partialbruchzerlegung ($\rightarrow$ nächstes Semester). Wir haben also

$$\int \frac{1}{(1+y)y}\, dy\Big|_{y=e^x} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\, dy\Big|_{y=e^x} = (\ln y - \ln(1+y))\Big|_{y=e^x} = x - \ln(1+e^x).$$