# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik
Wintersemester 2016/17

Ioannis Anapolitanos
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: ioannis.anapolitanos@kit.edu

Dies ist eine kurze Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Beispiele, Erläuterungen und veranschaulichen- den Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Danksagung: Die Vorlesungszusammenfassung ist eine Änderung der Vorlesungszusammenfassung von Herrn Dr. Kunstmann. Ich danke Herrn Dr. Kunstmann, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat seine Zusammenfassung zu verwenden.

## Contents

# 1 Aussagen

## 1.1 Aussagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

Im Rahmen der Vorlesung sind wir aber eher an **mathematischen Aussagen** interessiert. Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit $A$, $B$, $C$, ...

## 1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte Wahrheitstafeln .

$A \wedge B$ (logisches "und" (AND))

| $A$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $A \wedge B$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |

$A \vee B$ (logisches "oder" (OR))

| $A$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $A \vee B$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ |

**Achtung:** Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist zugelassen, dass beide Aussagen $A$ und $B$ wahr sind.

Negation $\neg A$ ("non $A$" oder "nicht $A$")

| $A$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $\neg A$ | $f$ | $w$ |

Implikation $A \Rightarrow B$ "wenn $A$, dann $B$", "$A$ impliziert $B$", "aus $A$ folgt $B$"

| $A$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $A \Rightarrow B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

| $A$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $w$ | $f$ | $w$ | $f$ |
| $A \Leftrightarrow B$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |

Man sagt: "$A$ ist äquivalent zu $B$", "$A$ ist gleichbedeutend mit $B$", "$A$ genau dann, wenn $B$", " $A$ dann und nur dann, wenn $B$".

### 1.3 Regeln

$\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A & \text{(doppelte Negation)} \\
(A \Leftrightarrow B) & \Leftrightarrow & [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] & \text{(Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen)} \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) & \text{(Negation von “und”)} \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) & \text{(Negation von “oder”)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) & \text{(Umformulierung der Implikation)} \\
\neg(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) & \text{(Negation der Implikation)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) & (\underline{\text{Kontraposition}}).
\end{array}
$$

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

### 1.4 Quantoren

Eine Aussageform $A(x)$, $A(x, y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen $x$, $y$, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.

Der Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle Objekte $x$ ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt $x$, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

**Negation:** $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$ und $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$.

In den allermeisten Fällen werden Quantoren eingeschränkt und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x) : B(x)$. Die Negation davon ist dann $\exists x$ mit $A(x) : \neg B(x)$.

**Achtung:** Bei All- und Existenzquantor kommt es i.a. auf die Reihenfolge an.

**Bemerkung:** Häufig schreiben wir Quantoren nicht als Zeichen, sondern sprachlich.

## 2 Mengen

### 2.1 Der Begriff der Menge

Wir verwenden die folgende naive “Definition”:

"Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte."

Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

$x \in M$ bedeutet: $x$ ist Element der Menge $M$, dh $x$ gehört zu $M$.

$x \notin M$ bedeutet: $x$ gehört nicht zu $M$, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

**Schreibweisen:** Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x, \text{ für die } A(x) \text{ gilt},$$

Häufig schreibt man auch, wenn die Menge $M$ gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : (x \in M) \wedge A(x)\}$. Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, z.B. $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

## 2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Seien $M_1$, $M_2$ Mengen.

**Definition 2.1.** *"$M_1$ ist Teilmenge von $M_2$":*

$$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2) \quad (\textit{bzw. } \forall x \in M_1 : x \in M_2).$$

*Für $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibt man oft der Deutlichkeit halber $M_1 \subsetneqq M_2$.*

**Gleichheit von Mengen:** $M_1 = M_2$ bedeutet, dass $M_1$ und $M_2$ dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. Da Äquivalenz zwei Implikationen bedeutet (siehe 1.3) bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

## 2.3 Operationen mit Mengen

Seien $M_1$, $M_2$, $M_3$ und $Q$ Mengen. D (a) Durchschnitt $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) Vereinigung $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.

(c) Differenz $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("$M_1$ ohne $M_2$").

**Regeln für Durchschnitt und Vereinigung:**

Kommutativität $\quad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \qquad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$

Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3, \qquad M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3.$

Distributivität:

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$.

**de Morgansche Regeln:** Wegen 1.3 (Negation von "und"/"oder") gilt auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2), \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

## 2.4 Die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.

**Regeln:** $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge $M$.

## 2.5 Die Potenzmenge

Ist $M$ eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von $M$

$$\mathrm{Pot}(M) := \{N : N \subseteq M\}$$

die Potenzmenge von $M$ (manchmal auch $\mathfrak{P}(M)$).

## 2.6 Das kartesische Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$ Mengen. Die Menge der geordneten $n$-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{für alle } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ gilt } x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben $M^n$, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

## 2.7 Die Mengen der reellen und komplexen Zahlen

### Reelle Zahlen und Betrag

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen. Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der Betrag von $a$ .

**Beachte:** Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von $a$ und $b$ auf der Zahlengeraden.

**Regeln:** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a| \geq 0$;  (2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;  (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(4) $\pm a \leq |a|$ und $\Big(|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; (a \leq c \text{ und } -a \leq c)\Big)$;

(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung ;

(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ umgekehrte Dreiecksungleichung .

### Die Menge der komplexen Zahlen

Wir betrachten eine Zahl $i$, mit $i^2 = -1$. Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der } \underline{\text{komplexen Zahlen}}.$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $x$ der Realteil von $z$ (geschrieben $\operatorname{Re} z$) und $y$ heißt der Imaginärteil von $z$ (geschrieben $\operatorname{Im} z$). Komplexe Zahlen $z$ mit $\operatorname{Re} z = 0$ heißen rein imaginär und komplexe Zahlen mit $\operatorname{Im} z = 0$ heißen reell.

**Also:** Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

**Konjugation und Betrag** Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die konjugierte komplexe Zahl . Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl $z$.

**Rechenregeln:** Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \;,$$
$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \text{ und } \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$
$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$
$$|z + w| \leq |z| + |w| \text{ (Dreiecksungleichung) und } ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x + iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

# 3 Funktionen

## 3.1 Zum Begriff der Funktion

Seien $X$, $Y$ Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

**Schreibweise** $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ ("$f$ von $X$ nach $Y$, $x$ wird abgebildet auf $f(x)$").

Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von $f$. Man kann diesen mit der Funktion $f$ identifizieren.

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt $X$ Definitionsbereich und $Y$ Wertebereich von $f$. Für $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ Bild von $A$ unter $f$, und für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von $B$ unter $f$. Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ Bild von $f$ (Menge aller $y \in Y$, die von $f$ getroffen werden).

**Definition 3.1.** *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.*

*(a) $f$ heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von $f$ getroffen wird.*

*(b) $f$ heißt injektiv, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dh falls es zu jedem Element im Bild von $f$ genau ein Urbild gibt.*

*(c) $f$ heißt bijektiv, falls $f$ injektiv und surjektiv ist.*

## 3.2 Komposition

Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert $g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$ eine Funktion $g \circ f$ ("$g$ nach $f$"), die Hintereinanderausführung oder Komposition von $f$ und $g$.

**Satz 3.1.** *Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

*dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist assoziativ.*

## 3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion $f^{-1}$, die Umkehrabbildung (oder Umkehrfunktion) von $f$.

**Beachte:** Da $f$ surjektiv ist, gibt es zu jedem $y$ ein solches $x$. Da $f$ injektiv ist, ist dieses $x$ eindeutig bestimmt. Somit ist $f^{-1}$ tatsächlich eine Funktion.

**Bemerkung 3.1.** *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.*

**Satz 3.2.** *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, so ist $f$ bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.*

**Bemerkung 3.2.** *Durch Vertauschen der Rollen von $f$ und $g$ folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.*

**Satz 3.3.** *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.*

# 4 Gründlichere Einführung der reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen . Wir führen diese Menge durch 15 Axiome ein, dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich **alle** weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an. Eine explizite Konstruktion (die natürlich möglich ist!), führen wir hier nicht durch.

## 4.1 Körperaxiome

Es gibt Verknüpfungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (“plus”, wir schreiben $a + b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (“mal”, wir schreiben $ab$ oder $a \cdot b$) mit

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad (A1) &\qquad (ab)c = a(bc) \quad (A5)\\
\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad (A2) &\qquad \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad (A6)\\
\forall a \in \mathbb{R} \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 \quad (A3) &\qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \quad (A7)\\
\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad (A4) &\qquad ab = ba \quad (A8)\\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac \quad (A9) &
\end{aligned}$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die Assoziativgesetze , $(A4)$ und $(A8)$ die Kommutativgesetze, und $(A9)$ ist das Distributivgesetz.

**Schreibweisen:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

## 4.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung “$\leq$” gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&(A10) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a,\\
&(A11) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c,\\
&(A12) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b,\\
&(A13) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c,\\
&(A14) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc.
\end{aligned}$$

$(A11)$ heißt Transitivität, $(A12)$ heißt Antisymmetrie. Außerdem beinhaltet $(A10)$ auch, dass $a \leq a$ gilt (Reflexivität).

$(A13)$ und $(A14)$ bedeuten, dass die Ordnung $\leq$ mit den Verknüpfungen “$+$” und “$\cdot$” verträglich ist.

**Schreibweisen:** $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

**Bemerkung 4.1.** *Aus* $(A1) - (A14)$ *lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.*

**Intervalle:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall,}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.
\end{aligned}$$

Weiter: $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$.

## 4.3 Supremum und Infimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

$M$ heißt nach oben [unten] beschränkt $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : x \leq \gamma$ $[x \geq \gamma]$.

In diesem Fall heißt $\gamma$ eine obere Schranke (OS) [untere Schranke (US)] von $M$.

Eine obere Schranke [untere Schranke] $\gamma$ von $M$ mit $\gamma \in M$ heißt Maximum [Minimum] von $M$ und wird mit $\max M$ [$\min M$] bezeichnet.

Wegen ($A12$) sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

**Definition 4.1.** *Ist $\gamma$ obere Schranke [untere Schranke] von $M$ mit $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ [$\gamma \geq \tilde{\gamma}$] für* ***jede*** *obere Schranke [untere Schranke] $\tilde{\gamma}$ von $M$, so heißt $\gamma$ Supremum [Infimum] von $M$ (**kleinste** obere Schranke von $M$ [**größte** untere Schranke von $M$]) und wird mit* $\sup M$ *[*$\inf M$*] bezeichnet.*

Nach ($A12$) sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

**Bemerkung 4.2.** *Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt* $\sup M = \max M$ *genau dann, wenn* $\sup M \in M$ *ist (entsprechend für* $\min$ *und* $\inf$*).*

## 4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

($A15$) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

**Folgerung 4.1.** *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

**Definition 4.2.** *Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls $M$ nach oben und nach unten beschränkt ist.*

**Bemerkung 4.3.** *$M$ beschränkt* $\Leftrightarrow \exists\gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.

**Satz 4.1.** *Sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:*

*(1) $A$ beschränkt* $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

*(2) $A$ nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow$ $B$ nach oben [nach unten] beschränkt und* $\sup B \leq \sup A$ *[*$\inf B \geq \inf A$*].*

*(3) Sei $A$ nach oben [nach unten] beschränkt und $\gamma$ eine obere Schranke [untere Schranke] von $A$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A &\iff \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } x \in A \textit{ mit } x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A &\iff \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } x \in A \textit{ mit } x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

## 4.5 Natürliche Zahlen

**Satz 4.2.** *Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.*

*(1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.*
*(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*
*(3) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.*

## 4.6 Vollständige Induktion

### Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{aligned} &\text{Induktionsanfang } (IA) && A(1) \\ &\text{Induktionsschritt } (IS) && \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1)) . \end{aligned}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

### Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, $\ldots$, $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

**Varianten der Induktion:** Man kann die Induktion auch bei z.B. $n = 5$ beginnen lassen. Zum Beweis von "$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5 : A(n)$" hat man dann zu zeigen:

$$\begin{aligned} &(IA) && A(5) \\ &(IS) && \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 : (A(n) \Rightarrow A(n+1)) . \end{aligned}$$

Bei der <u>Abschnittsinduktion</u> zeigt man

$$\begin{aligned} &(IA) && A(1) \\ &(IS) && \forall n \in \mathbb{N} : (A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)) . \end{aligned}$$

## 4.7 Ganze und rationale Zahlen

**Definition 4.3.** $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *Menge der ganzen Zahlen* und $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *Menge der rationalen Zahlen* .

**Satz 4.3.** *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum.*

## 4.8 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ („}n\text{ über }k\text{").}$$

Es gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n \geq k \geq 0$, $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

**Lemma 4.1.** *Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

## 4.9 Potenzen

Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$.

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(3) **Bernoullische Ungleichung** (BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

(4) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

**Folgerung 4.2.** *Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $a > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$. Ist $a \in (0,1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.*

## 4.10 Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$. Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, „$n$-te Wurzel aus $a$".

**Folgerung 4.3.** *Für alle $a, b \geq 0$ gilt wegen 4.9 Rechenregel (4):*
*$a \leq b \iff \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, und wegen $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$ gilt $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.*

# 5 Mehr über die komplexen Zahlen

**Polarkoordinaten und Eulerformel:** Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (wobei $x, y \in \mathbb{R}$) kann man schreiben mithilfe ihres Betrages $r = |z|$ und des Winkels $\varphi$ zur positiven $x$-Achse (dh mithilfe von Polarkoordinaten ). Es ist nämlich $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ nach Schulmathematik. Verwendet man die Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

so erhält man $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$. Multiplikation mit $z$ dreht dann um den Winkel $\varphi$.

Sind sin und cos bekannt, so kann man die Eulerformel als Definition von $e^{i\varphi}$ verwenden.

## 5.1 Polynome

Ein Polynom $p$ (oder $p(z)$) mit komplexen Koeffizienten ist ein formaler Ausdruck $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt reell , wenn alle Koeffizienten $a_j$ reell sind.

Das Polynom heißt vom Grad $n$ , falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich normiert , falls $a_n = 1$ ist.

Falls $a_n = 0$ ist, so ist auch $p(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, dh führende Nullkoeffizienten kann man weglassen.

Es gilt insbesondere

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten (in der "freien Variablen" $z$) bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[z]$.

**Definition 5.1.** *Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt Nullstelle des Polynoms $p$.*

## 5.2 Polynomdivision

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]\setminus\{0\}$ Polynome vom Grad $n$ bzw. $k \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} m = n - k$ und $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < k$ und $p = mq + r$ (Division mit Rest).

**Satz 5.1.** *Ist $p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist $z_0$ Nullstelle von $p$, so gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n - 1$ mit*

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

*Dabei heißt $z - z_0$ Linearfaktor.*

**Definition 5.2.** *Die Vielfachheit (Vfh) einer Nullstelle $z_0$ von $p$ gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann.*

**Folgerung 5.1.** *Ein Polynom vom Grad $n$ hat höchstens $n$ Nullstellen.*

## 5.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

**Folgerung 5.2.** *Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

*Eine feste Nullstelle $z_0$ von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.*

## 5.4 Die Gleichung $z^n = c, c \in \mathbb{C}$

Um die Gleichung zu lösen schreibt man $c$ in Polarkoordinaten ($c = re^{i\phi}$) und benutzt man den Folgenden Satz

**Satz 5.2.** *Die Lösungen von $z^n = re^{i\phi}$ sind: $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(2j\pi+\phi)}{n}}, j = 0, 1, ..., n-1$.*

# 6 Folgen und Konvergenz

**Definition 6.1.** *Eine reelle [komplexe] Zahlenfolge oder Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].*

*Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz $(a_n)$ oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.*

## 6.1 Konvergenz

Sei $(a_n)$ eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \underbrace{n_0}_{= n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: "die $a_n$ kommen $a$ beliebig nahe" oder "der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein".

Die Zahl $a$ heißt dann Limes oder Grenzwert der Folge $(a_n)$.

Eine Folge $(a_n)$ heißt konvergent , falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent .

**Schreibweisen:** Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

**Bemerkung 6.1.** *(1) Für jede Zahlenfolge $(a_n)$ und jedes $a$ gilt:* $\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0$.

*Insbesondere ist für $a = 0$:* $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$. *(2) Für $b \in \mathbb{C}$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1$.

*(3) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.*

*(4) Eine konvergente Folge $(a_n)$ ist beschränkt , dh die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.*

*(5) Ist $(z_n)$ eine komplexe Zahlenfolge, so ist $(z_n)$ genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen $(Re\, z_n)$ und $(Im\, z_n)$ konvergent sind. Genauer gilt für $z_0 \in \mathbb{C}$:*

$$z_n \to z_0 \iff Re\, z_n \to Re\, z_0 \text{ und } Im\, z_n \to Im\, z_0$$

*Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen.*

Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ als Folge.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Eigenschaft für alle $n \geq n_0$ gilt.

## 6.2 Grenzwertsätze

Seien $(a_n)$, $(b_n)$, $(\alpha_n)$ und $(c_n)$ reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \leq \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \Longrightarrow a \leq b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n$ und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

## 6.3 Monotone Folgen

Eine reelle Folge $(a_n)$ heißt

$$\begin{aligned}
\text{monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1},\\
\text{monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1},\\
\text{streng monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1},\\
\text{streng monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}.
\end{aligned}$$

**Satz 6.1.** *Ist eine monoton wachsende [bzw. fallende] reelle Folge* $(a_n)$ *beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *[bzw.* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*].*

## 6.4 Wichtige Beispiele

(1) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$:

(3) Konvergiert die Folge $(a_n)$ gegen $a$ so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to a$.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_n)$ konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1 - z)^{-1}$.

## 6.5 Teilfolgen

Ist $(a_n)$ eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ Teilfolge (TF) von $(a_n)$.

Eine Zahl $b$ heißt Häufungswert (HW) der Folge $(a_n)$ , falls es eine Teilfolge von $(a_n)$ gibt, die gegen $b$ konvergiert.

**Satz 6.2 ((Bolzano-Weierstraß)).** *Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.*

**Bemerkung 6.2.** *Der Satz gilt auch für komplexe Zahlenfolgen.*

## 6.6 Rechnen mit $\infty$

Sei $(a_n)$ eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} a_n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\ a_n \to -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < K. \end{aligned}$$

Also $a_n \to \infty$ $[a_n \to -\infty]$, falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ gilt, dass $a_n > K$ $[a_n < K]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

**Achtung:** Man redet hier nicht von "Konvergenz" und auch nicht von "Grenzwert" , denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh $\infty$ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge $a_n$ geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

**Bemerkung 6.3.** *(a) Gilt* $a_n \to \pm\infty$, *so folgt* $|a_n| \to \infty$ *und* $1/a_n \to 0$. *Ist* $a_n > 0$ *für alle* $n$ *und* $a_n \to 0$, *so folgt* $1/a_n \to \infty$.

*(b) Ist die reelle Folge $(a_n)$ nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von $(a_n)$ mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].*

*(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge $(a_n)$ gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.*

**Konventionen:** Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

**Achtung:** Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

**Regeln:** Seien $(a_n)$, $(b_n)$ reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to a + b, \quad \text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b, \quad \text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Beachte, dass Bemerkung (a) oben das Verhalten von $(1/a_n)$ beschreibt.

**Definition 6.2.** *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M = -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad M \textit{ ist nicht nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.4.** *Manchmal findet man auch* $\sup \emptyset := -\infty$ *und* $\inf \emptyset := \infty$.

**Bemerkung 6.5.** *Man hat also für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \sup M = \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \, \exists x \in M : x > K, \\ \inf M = -\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \, \exists x \in M : x < -K. \end{aligned}$$

## 6.7 Limes superior und Limes inferior

Sei $(a_n)$ eine reelle Folge. Ist

$$A := \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \text{ es gibt Teilfolge von } a_k(n) \text{ mit } a_{k(n)} \to a\}$$

dann gilt immer $A \neq \emptyset$. A hat immer ein Maximum $M$ und ein Minimum $m$, wobei, wenn z.B. $\infty \in A$ dann sagen wir $\max A := \infty$, also der Begriff des Maximums/Minimums hier erweitert den Begriff des Maximums/Minimums einer Teilmenge der reellen Zahlen.

**Definition 6.3.** *Wir definieren* $\liminf a_n := m, \limsup a_n := M$.

Ist $(a_n)$ nach beschränkt, dann ist

$$A = \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : a \text{ ist Häufungswert von } a_n\}.$$

Also ist $\liminf a_n$ [bzw. $\limsup a_n$] der kleinste [bzw. größte] Häufungswert von $a_n$.

**Schreib- und Sprechweisen:** Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "Limes superior" , entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ (" Limes inferior") .

**Bemerkung 6.6.** *Ist $a_n$ eine Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann gilt*

$$a_n \to a \iff A = a \iff \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

*Zusätzlich gilt: $a_n \to a \implies a_{k(n)} \to a$ für alle Teilfolgen $a_{k(n)}$ von $a_n$*

# 7 Reihen

## 7.1 Definition und Elementare Eigenschaften

**Definition 7.1.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die Zahl $s_N$ heißt N-te Partialsumme oder N-te Teilsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

*Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent [divergent], falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert [bzw. divergiert]. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der Reihenwert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.*

**Bemerkung 7.1.** *(a) Die Folge $(a_n)$ kann hier reell oder komplex sein. Ist $(a_n)$ komplex, so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n$ Realteil der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$ heißt Imaginärteil von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

*(b) Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil **und** ihr Imaginärteil **beide** konvergieren. In diesem Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$, also $Re\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Re\, a_n$ und $Im\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Im\, a_n$.*

**Wichtige Beispiele:** (1) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$.

(2) Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, k \geq 2$ ist konvergent.

**Satz 7.1.** *Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ Folgen und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.*

*(1) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

*(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n$.*

*(3) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und definiert man $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, so gilt $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$, dh die "Reihenendstücke" konvergieren gegen Null.*

*(4) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt $a_n \to 0$.*

*(5) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$), so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

## 7.2 Absolut konvergente Reihen

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der $a_n$ konvergiert).

**Satz 7.2.** *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt die "Dreiecksungleichung für Reihen":*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

## 7.3 Majoranten- und Minorantenkriterium

Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

## 7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Sei $(b_n)$ eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

## 7.5 Wurzelkriterium

Sei $(a_n)$ eine Folge und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Bemerkung 7.2.** *Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung.*

## 7.6 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für $n$ mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Bemerkung 7.3.** *Konvergiert $(c_n)$ gegen $\alpha$, so ist für $\alpha < 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Im Falle $\alpha = 1$ ist **keine** allgemeine Aussage möglich.*

## 7.7 Die Exponentialreihe

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

**Definition 7.2.** *Die Eulersche Zahl ist $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.*

**Satz 7.3.** *Es gilt $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

## 7.8 Das Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

**Satz 7.4.** *Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent**, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

## 7.9 Die Exponentialfunktion

Da die Exponentialreihe nach 7.7 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, $E$ heißt die komplexe Exponentialfunktion .

(0) Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = e$

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x + iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.

(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

**Bemerkung und Definition:** Wegen (2), (8) und 7.7 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ oder $\exp(z) := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

## 7.10 Sinus und Cosinus

Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots. \end{aligned}$$

(2) **Eulerformel:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1, \text{also } |\sin x| \leq 1, \ |\cos x| \leq 1.$

(4) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w,\\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.\end{aligned}$$

**Abschätzungen**:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \leq |h|E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h|E(|h|)$.

Man kann die Exponentialfunktion $e^z$ so definieren: $e^z = E(z)$.

## 7.11 Potenzreihen

**Definition 7.3.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine* Potenzreihe (PR) um $z_0$ *hat die Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die $a_n$ heißen* Koeffizienten *der Potenzreihe und $z_0$ heißt* Entwicklungspunkt.

*Wir nennen eine Potenzreihe* reell, *falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle $a_n$ reell sind.*

**Definition 7.4.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist definiert durch*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

**Satz 7.5.** $|z - z_0| < R \implies$ *Potenzreihe absolut konvergent.*
$|z - z_0| > R \implies$ *Potenzreihe divergent.*

**Satz 7.6.** *(Konvergenzradius R über Quotienten): Sei $\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, dann $R = \frac{1}{\alpha}$.*

Achtung: $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oder $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ geben nicht, was der Konvergenzradius ist.

# 8 Stetigkeit

## 8.1 Limes, Definition der Stetigkeit, Kriterien für Stetigkeit

**Definition 8.1** (Limes)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

*wenn* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *so dass*

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 8.1.** *Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn* $f : D \to \mathbb{R}$, *mit* $D$ *Intervall oder endliche Vereinigung von Intervallen* [1]. *In diesem Fall muss* $0 < |x - x_0| < \delta$ *durch* $x \in D$ *und* $0 < |x - x_0| < \delta$ *ersetzt werden. Im Rest der Vorlesung ist mit* $D$ *eine solche Menge gemeint. Der Limes kann auch für kompliziertere Mengen definiert werden, aber wir führen hier die Definition nicht ein.*

**Definition 8.2.** *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D$ [2]. $f$ *heißt stetig in* $x_0$, *wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f$ *heißt stetig, falls sie stetig in* $y$ *ist* $\forall y \in D$.

**Satz 8.1.** *(i) Alle folgende Funktionen sind stetig: Polynome, sin, cos, Exponentialfunktion.*
*(ii)* $f$ *stetig in* $x_0$ *und* $g$ *stetig in* $f(x_0) \implies g \circ f$ *ist stetig in* $x_0$.
*(iii) wenn* $f, g$ *stetig in* $x_0$, *dann* $f + g, f \cdot g$ *sind stetig in* $x_0$. *Wenn dazu* $g(x_0) \neq 0$ *dann ist* $\frac{f}{g}$ *stetig in* $x_0$.

**Satz 8.2.** *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ . *Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \lim f(x_n) = y, \text{ für alle Folgen in } D/\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0.$$

## 8.2 Zwischenwertsatz

**Satz 8.3** (Zwischenwertsatz)**.** *Seien* $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Wenn* $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $f(a) < c < f(b)$ $[f(a) > c > f(b)]$ *dann* $\exists x_0 \in (a, b)$ *mit* $f(x_0) = c$.

Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $I$ ein Intervall ist. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall.

## 8.3 Einseitige Grenzwerte

**Definition 8.3** (Einseitige Grenzwerte)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0, y \in \mathbb{R}$. *Dann*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = y \quad [\text{bzw. } \lim_{x \to x_0-} f(x) = y],$$

*wenn* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *so dass* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *[bzw.* $x_0 - \delta < x < x_0$*]* $\implies |f(x) - y| < \epsilon$. *In diesem Fall heißt* $y$ *rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von* $f$ *in* $x_0$.

[1] Hier das Intervall $[a, a] = \{a\}$ ist nicht zu berücksichtigen

[2] Der Begrief der stetigen Funktion kann für $D$ eine beliebige nicht leere Teilemge von $\mathbb{R}$ eingeführt werden (und nicht nur für endliche Verreinigung von Intervallen). Hier führen wir aber diese Definition nicht ein.

**Satz 8.4.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \left( \lim_{x \to x_0-} f(x) = y \text{ und } \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \right).$$

**Bemerkung 8.2.** *Die Definition und der Satz oben sind anwendbar für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$, wenn es sinnvoll ist, $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ zu betrachten.*

**Bemerkung 8.3.** *Man kann $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ mit $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von folgen, und die Intuition ist die gleiche.*

## 8.4 Monotone Funktionen

**Definition 8.4.** *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $f$ heißt* monoton wachsend *[bzw.* monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

*$f$ heißt* streng monoton wachsend *[bzw.* streng monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

*$f$ heißt* monoton*, falls $f$ monoton wachsend oder monoton fallend ist, und $f$ heißt* streng monoton*, falls $f$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

**Satz 8.5.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

*(a) Dann ist $f$ injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

*(b) Ist $f$ zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

# 9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (Exponentialfunktion) ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

**Definition 9.1** (Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (*natürlicher*)* Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*, d.h. also* $\ln x := \exp^{-1}(x)$ *für* $x \in (0, \infty)$.

**Eigenschaften:** ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}, \ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$, sowie $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

**Definition 9.2** (Die allgemeine Potenz). *Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:*

$$a^x := \exp(x \ln a) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv.

**Definition 9.3** (Der allgemeine Logarithmus). *Die Umkehrfunktion von $a^x$ bezeichnet durch $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt* Logarithmus zur Basis $a$. *Es ist also $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a^{\log_a y} = y$ für alle $y \in (0, \infty)$.*

**Satz 9.1.** *Für alle $y \in (0, \infty)$ gilt $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.*

**Satz 9.2.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat $f$ ein Minimum und ein Maximum in $[a, b]$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

**Bemerkung 9.1.** *Die Aussage des Satzes gilt auch, wenn [a,b] durch $\cup_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ ersetzt wird, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \leq b_j$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.*

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(ii)$\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$;
(iii) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind $2\pi$-*periodisch*).
(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; (v) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Nullstellen von sin und cos:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$.

**Arcuscosinus** Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arccos* : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ und sie heißt Arcuscosinus.
**Arcussinus** Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arcsin* : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und sie heißt Arcussinus.
**Tangens** Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*. (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)
**Arcustangens** $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ und sie heißt *Arcustangens*.

**Anwendung (Polarkoordinaten)** Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\phi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* $z$ und $\phi =: \arg z$ heißt das *Argument von* $z$.

**Wie wird** $\arg z$ **bestimmt?** Wenn z=a+bi, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$, dann $\phi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\phi = sgn(b)\pi/2$ für $a = 0$ ($sgn(b) = \frac{b}{|b|}$), sowie $\phi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\phi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

# 10 Differentialrechnung

## 10.1 Differentiarbarkeit

Im Rest des Kapitels ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall [3].

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

**Definition 10.1.** *$f$ heißt in $x_0 \in I$* differenzierbar *(**dbar**), falls der Limes $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert heißt* die Ableitung von $f$ in $x_0$. *Bezeichnung: $f'(x_0)$.*

*Die Funktion $f$ heißt* auf $I$ differenzierbar, *falls $f$ in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.*

**Bemerkung 10.1.** *Es ist* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

**Satz 10.1.** *Ist $f$ in $x_0$ differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ stetig.*

## 10.2 Ableitungsregeln

**Satz 10.2** (**Abbleitungsregeln**). *(a) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

*(1) $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

*(2) $fg$ ist differenzierbar in $x_0$ und*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{Produktregel.}$$

*(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J := I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{Quotientenregel.}$$

[3] Aber kein Intervall der Form [a,a]={a}.

*(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \text{Kettenregel.}$$

**Satz 10.3 (Satz über die Umkehrfunktion).** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf $I$. Ist $f$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

**Definition 10.2.** *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum *[ bzw.* Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{ bzw. } f(x) \geq f(x_0)].$$

*Ein* relatives *oder* lokales Extremum *ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum* [4].

**Bemerkung 10.2.** *Ein Extremum (Maximum oder Minimum) einer Funktion, ist auch ein lokales Extremum der Funktion.*

**Satz 10.4.** *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in $x_0$ differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.*

**Korollar 10.1.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn $f$ differentierbar ist auf $(a, b)$, dann*

$$\max f := \max f([a, b]) = \max f(\{a, b\} \cup A)$$

$$\min f := \min f([a, b]) = \min f(\{a, b\} \cup A),$$

*wobei $A = \{x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\}$.*

## 10.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

**Satz 10.5. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)*** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a, b)$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Folgerungen** Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf $I$ differenzierbar.

(1) $f$ ist auf $I$ konstant $\Leftrightarrow f' = 0$ auf $I$.

(2) Ist $f' = g'$ auf $I$, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf $I$.

(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf $I$, so ist $f$ auf $I$ monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

[4] In dieser Definition kann $I$ ersetzt werden durch eine Menge die kein Intervall ist.

## 10.4 Höhere Ableitungen und Taylorsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (**dbar**).

**Definition 10.3.** *(a) $f$ heißt in $x_0 \in I$* zweimal differenzierbar*, falls $f'$ in $x_0$ differenzierbar ist. Dann heißt*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

*die* 2. Ableitung von $f$ in $x_0$*.*

*$f$ heißt auf $I$* zweimal differenzierbar*, falls $f'$ auf $I$ differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$* zweite Ableitung von $f$ auf $I$*.*

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. $f'''$, $f^{(4)}$, ...

**Definition 10.4.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. $f$ heißt* auf $I$ $n$-mal stetig differenzierbar*, falls $f$ auf $I$ $n$-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.*

*Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls $f$ auf $I$ stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn $f$ auf $I$ beliebig oft differenzierbar ist.*

**Bemerkung 10.3.** *Wenn eine Funktion differentierbar ist, dann ist die Abbleitung nicht unbedingt eine stetige Funktion.*

**Satz 10.6** (10.12 Satz von Taylor)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf $I$ differentierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom } T_n(f;x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{n\text{-tes Restglied } R_n(f,x_0)(x)} . \end{aligned}$$

**Definition 10.5.** *Falls $f \in C^\infty(I)$, heißt die Potenzrreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylorreihe der Funktion $f$.*

**Korollar 10.2.** *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $x_0 \in I$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f;x_0)(x) \to f(x) \quad \forall x \in I \qquad \left( \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) \quad \forall x \in I \right),$$

*genau dann wenn $R_n(f,x_0)(x) \to 0$ für jedes $x \in I$*

Wenn die Aussagen des Korollars gelten, ist die Funktion durch ihre Taylorreihe darstellbar.

**Satz 10.7** (10.13 Folgerung des Taylorsatzes)**.** *Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ mit $x_0$ kein Randpunkt von $I$. Weiter sei*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

*(a) Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].*

*(b) Ist $n$ ungerade, so hat $f$ in $x_0$ kein lokales Extremum.*

**Bemerkung 10.4.** *Allgemeiner sei $f \in C^2(I)$ mit $f'' \geq 0$ auf $I$ [bzw. mit $f'' \leq 0$ auf $I$]. Solche Funktionen heißen* konvex *[bzw.* konkav*]. Es gilt dann:*

> Ist $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein globales Minimum [bzw. ein globales Maximum].

## 10.5 Die Regeln von de l'Hospital

**Satz 10.8** (10.11 **Die Regeln von de l'Hospital**). *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf $(a, b)$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

*(a) Ist $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0$, so gilt*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

*(b) Ist $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$, so gilt*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

**Bemerkung 10.5.** *Ähnliche Aussage gilt, wenn man $(a, b)$ durch $(b, a)$ ersetzt. In diesem Fall kann $b = -\infty$ anstatt $b = \infty$ betrachtet werden.*

**Satz 10.9.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

*Dann ist $f$ auf $I$ differentierbar, und für jedes $x \in I$ gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

*Insbesondere ist $f$ stetig in $I$.*

## 10.6 Ableitung von Potenzreihen

**Satz 10.10** ( Ableitung von Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0, \infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ *und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

*Dann ist* $f$ *auf* $I$ *differentierbar (insbesondere stetig), und*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I.$$

# 11 Integration

Im Rest der Vorlesung sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. das Bild $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ von $f$ ist beschränkt.

## 11.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

**Definition 11.1.** $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *heißt eine Zerlegung von* $[a,b]$, *falls* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$I_j \;:=\; [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j).$$

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$ $\left[S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|\right]$ heißt Untersumme [Obersumme] von $f$ bzgl. $Z$

Sei $m := \inf f([a,b])$ und $M := \sup f([a,b])$.

**Satz 11.1.** *Seien* $Z_1$, $Z_2$ *Zerlegungen.*

*(1) Es gilt* $m(b-a) \le s_f(Z_1) \le S_f(Z_2) \le M(b-a)$.

*(2) Ist* $Z_1 \subseteq Z_2$, *so gilt* $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2) \le S_f(Z_2) \le S_f(Z_1)$.

**Definition 11.2.** $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a,b]\}$(*unteres Integral von* $f$ *über* $[a,b]$)
$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z$ *ist Zerlegung von* $[a,b]\}$(*oberes Integral von* $f$ *über* $[a,b]$).

Es gilt $m(b-a) \le s_f \le S_f \le M(b-a)$.

## 11.2 Riemann Integrierbarkeit, Riemann Integral

**Definition 11.3** (11.2)**.** *$f$ heißt* <u>*(Riemann-)*integrierbar</u> *(*ib*)( , falls $s_f = S_f$ gilt. In diesen Falle heißt*

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

*das* <u>*(Riemann-)*Integral</u> *von $f$ über $[a, b]$ .*

**Definition 11.4.** $R[a, b] := \{g : [a, b] \to \mathbb{R} : g$ *beschränkt und integrierbar*$\}$

Für eine Zerlegung $Z$, definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \ldots, n\} \text{ (\underline{Feinheit von $Z$})}.$$

Ein $n$-Tupel $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt <u>passender Zwischenvektor</u>, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt. Für einen solchen $\xi$ heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine <u>Riemannsche Summe</u> . Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z)$.

**Satz 11.2** (11.7)**.** *Sei $f \in R[a, b]$ und $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\|Z_l\| \to 0$, sowie $(\xi^{(l)})$ eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_f(Z_l, \xi^{(l)}) = \int_a^b f\,dx.$$

**Bemerkung 11.1.** *Der Satz beschreibt wie ein Integral approximiert werden kann (z.B. mit Computer). Das ist nützlich, wenn es unmöglich ist das Integral explizit zu berechnen.*

## 11.3 Eigenschaften des Riemann Integrals

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ dann $f \in R[a, b]$ und $\int_a^b f\,dx = c(b - a)$. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f$ integrierbar, d.h. $f \in R[a, b]$.

Seien $f, g \in R[a, b]$. Dann

(1) Gilt $f \leq g$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.

(2) $fg \in R[a, b]$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

(3) $|f| \in R[a,b]$ und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).

(4) Wenn $a < c < b$ dann $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.
Im Rest des Kapitels ist I ein Intervall.

**Definition 11.5** (11.11)**.** *Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $F$ auf $I$ differenzierbar ist mit $F' = f$ auf $I$, so heißt $F$ eine* Stammfunktion *von $f$* auf *$I$.*

### 11.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Partielle Integration, Integration durch Substitution

**Satz 11.3** (11.10 **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
*(1) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist eine Stammfunktion von $f$ auf $[a,b]$.*
*(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$ auf $[a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad \left( =: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b \right).$$

Für eine Stammfunktion von $f$ schreibt man auch $\int f(x)dx$ (unbestimmtes Integral) .

**Satz 11.4** ( **Partielle Integration**)**.** *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad \textit{auf } I.$$

*Ist $I = [a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

**Satz 11.5** (11.13 **Integration durch Substitution**)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1(I)$ mit $u(I) \subseteq I$. Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ dann gilt*

*(i) $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.*

*(ii) $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u(b)) - F(u(a))$.*

## 12 Uneigentliche Integrale

In dieser Vorlesung:
(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei $f$ über jedes Intervall

$[a,b] \subseteq I$ integrierbar.
(2) Es seien stets $a,b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha < b$ und $a < \beta$.

13.4 **Konvergenz uneigentlicher Integrale** Sei $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha,b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\,dx$) heißt konvergent, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \Big(\text{bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\Big).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

**Definition 12.1.** *Sei $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das* uneigentliche Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *heißt konvergent, falls es ein $c \in (\alpha,\beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$* ***beide*** *konvergent sind. In diesem Fall setzt man*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

*und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha,\beta)$.*

*Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt divergent, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.*

**Definition 12.2** (Absolut konvergente uneigentliche Integrale)**.** *Ein uneigentliches Integral $\int_I f(x)\,dx$ (Integral über das Intervall $I$) heißt absolut konvergent, falls $\int_I |f(x)|\,dx$ konvergent ist.*

**Satz 12.1** (13.7)**.** *(1) Ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ konvergent und*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

*(2)* ***Majorantenkriterium:*** *Ist $|f| \leq g$ auf $I$ und $\int_I g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ absolut konvergent.*
*(3)* ***Minorantenkriterium:*** *Ist $f \geq g \geq 0$ auf $I$ und $\int_I g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_I f(x)\,dx$ divergent.*

# 13 Grundzüge der linearen Algebra

In diesem Kapitel schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Alle Aussagen Definitionen unten sind anwendbar wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Definition 13.1.**

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \textit{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

*Wir definieren*

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

*durch* komponentenweise *Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit $\alpha$, dh durch*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.

## 13.1 Vektorraumaxiome

Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

$(V1)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
$(V2)$ $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
$(V3)$ es gibt eine $0 \in V$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
$(V4)$ für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
$(V5)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
$(V6)$ $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ und $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ (Distributivität),
$(V7)$ $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

**Definition 13.2.** *Ist $V \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, für welche die Eigenschaften $(V1)$–$(V7)$ gelten, so heißt $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ oder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (*$\mathbb{K}$-VR*). Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren .*

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

## 13.2 Untervektorräume und linearer Aufspann

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**Definition 13.3.** *Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unter(vektor)raum oder linearer Teilraum von $V$, wenn*
*(i) $U \neq \emptyset$ ist und*
*(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.*

**Definition 13.4.** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus $V$. Eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist ein Vektor der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

*Ist $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$, so ist*

$$lin(M) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \Big\}$$

*ein Untervektorraum von $V$, genannt der von $M$ erzeugte Untervektorraum / lineare Aufspann von $M$ .*

## 13.3 Affine Teilräume

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt affiner Teil- oder Unterraum von $V$, falls es einen Untervektorraum $U$ von $V$ und ein $v \in V$ gibt mit

$$W = v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

## 13.4 Lineare Unabhängigkeit

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**Definition 13.5.** *Man ninnt $n$ Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig , falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig . Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind also genau dann linear abhängig, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$.

## 13.5 Zeilenumformungen, Zeilenstufenform

Seien $n$ Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix $A$, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A$ ist eine $n \times m$-Matrix mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Die Matrix $A$ bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden Zeilenumformungen für eine gegebene $n \times m$-Matrix $B$ mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile $w_j$ durch $\alpha w_j$, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
(Z2) Ersetze eine Zeile $w_j$ durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$
(Z3) Vertausche die Zeilen $w_j$ und $w_k$, wobei $j \neq k$.

**Bemerkung 13.1.** *Die Zeilen von $B$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.*

**Satz 13.1.** *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ überführen, die in Zeilenstufenform (ZSF) ist. Dabei heißt*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

*in Zeilenstufenform, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit*
*(i) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;*
*(ii) für $j = r+1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.*

## 13.6 Basen und Dimension, Zeilennormalform

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
**Satz und Definition:** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ heißen Basis von $V$, falls sie linear unabhängig sind und $\mathrm{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = V$ gilt. In diesem Fall enthalten je zwei Basen von $V$ die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die Dimension von $V$, geschrieben $\dim V$.

**Bemerkung 13.2.** *Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von Dimension $n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension $2n$.*

**Bemerkung 13.3.** *Wir betrachten die Vektoren $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$, wobei $e_j := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (alle Komponenten sind Null außer der $j$-ten). Dann ist $e_1, ..., e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ genannt die Standardbasis.*

**Definition 13.6.** *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis von $V$, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$. Die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ heißen Koordinaten von $v$ bzgl. der Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$ .*

**Zeilennormalform** Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform (ZNF) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ in Zeilennormalform , wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:
(iii) für $j = 1, 2, \dots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \dots, j-1$ (dh oberhalb von $c_{jk_j}$ stehen auch nur Nullen).

## 13.7 Lineare Gleichungssysteme

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das Matrix-Vektor-Produkt :
Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^m$ ist $A\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_k\right)_{j=1}^{n} \in \mathbb{K}^n$.
**Beachte:** Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als $m$-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

## 13.8 Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A + B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle $(j, k)$ werden die Einträge addiert bzw. mit $\alpha$ multipliziert.

## 13.9 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\operatorname{Kern} A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

$\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt inhomogen und $\vec{b}$ heißt Inhomogenität der Gleichung. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung, dann und nur dann wenn $\vec{b} \in \operatorname{Bild} A$.

**Satz 13.2.** *(1) $\operatorname{Kern} A$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ und $\operatorname{Bild} A$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.*

*(2) $\operatorname{Bild} A$ ist der lineare Aufspann der Spalten von $A$.*

*(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Kern} A$. Ist $\vec{z} \in \operatorname{Kern} A$, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b}$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein* affiner Teilraum *von $\mathbb{K}^m$. (Also hat das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen).*

## 13.10 Lösungsalgorithmus, Dimensionsformel

Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix $A$ um $\vec{b}$ als $(m + 1)$-te Spalte, betrachten also $(A \,|\, \vec{b}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A \,|\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

**Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):**
(1) Matrix $A$ um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A \,|\, \vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

**Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit:** Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A \,|\, \vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1, \ldots, m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

**Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung:** Für alle Spalten mit der Eigenschaft, dass kein Element von ihnen das erste nicht Null Element seiner Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.

Um den Kern einer Matrix $A$ zu bestimmen lösen wir die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Lösungsalgorithmus von Gauß. Um das Bild einer Matrix zu bestimmen
(1) Wir schreiben das zugehörige System wo die rechte Seite Parameter sind.
(2) Mit dem Algorithmus von Gauß bestimmen wir Bedingungen für die Lösbarkeit.
Den Kern kann man alternativ mit dem -1 Ergänzung Trick bestimmen und zwar
(1) Man bringt die Matrix $A$ in Zeilennormalform.
(2) Man streicht die Zeilen die Null sind (wenn es solche Zeilen gibt)
(3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind, bis auf ein Element das $-1$ ist. Die Ergänzung wird so gemacht, damit die diagonalen Elemente der Matrix nur 1 und -1 sind.
(4) Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

**Dimensionsformel** Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt $\dim \mathrm{Kern}\, A + \dim \mathrm{Bild}\, A = n$.
**Rang** Wir definieren den Rang einer Matrix durch $\mathrm{Rang} A = \dim \mathrm{Bild}\, A$.
**Satz** Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\iff \mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}(A|\vec{b})$.

## 13.11 Lineare Abbildungen

Seien $V, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume.

**Definition 13.7.** *Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt linear , (bzw. genauer* $\mathbb{K}$-linear*), falls für alle $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$

*Für ein solches $\phi$ heißt*

$$Kern\,\phi := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

*der Kern von $\phi$ und*

$$Bild\,\phi := \{\phi(x) : x \in V\}$$

*heißt Bild von $\phi$.*

**Satz 13.3.** *Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt:*
*(1) Kern$\,\phi$[bzw. Bild$\,\phi$ ] ist ein Unterraum von $V$ [bzw. $W$].*
*(2) $\phi$ ist injektiv $\iff$ Kern$\,\phi = \{0\}$.*

## 13.12 Das Produkt von Matrizen

Wie immer schreiben wir wieder $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Seien $n, m, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times q}$ Matrizen mit $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ und $B = (b_{kl})_{k=1}^{m}{}_{l=1}^{q}$. Das Matrixprodukt $AB \in \mathbb{K}^{n\times q}$, ist die Matrix $C = (c_{jl})_{j=1}^{n}{}_{l=1}^{q}$ mit

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{kl}, \qquad j = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, q.$$

**Eigenschaften des Produktes von Matrizen**: Für alle $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}$, $C \in \mathbb{K}^{q\times r}$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(A_1 + \alpha A_2)B_1 = A_1 B_1 + \alpha A_2 B_1, \quad A_1(B_1 + \alpha B_2) = A_1 B_1 + \alpha A_1 B_2, \quad (A_1 B_1)C = A_1(B_1 C).$$

## 13.13 Invertierbare Matrizen

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $I_n := (\delta_{jk})_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix (wir schreiben auch kurz $I$, wenn $n$ aus dem Zusammenhang klar ist).

Es gilt dann $IA = AI = A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

**Definition 13.8.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt regulär, falls $\operatorname{Rang} A = n$ ist, und invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I$. In diesem Fall ist $B$ eindeutig und heißt Inverse von $A$ (oder zu $A$ inverse Matrix). Sie wird mit $A^{-1}$ bezeichnet.*

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Dann sind $A^{-1}$ und $AB$ invertierbar, und es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{und} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**Satz 13.4.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

$$A \textit{ regulär} \iff \operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\} \iff A \textit{ invertierbar}.$$

**Bemerkung 13.4.** *Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = I$, so sind $A$ und $B$ invertierbar und es gilt $A^{-1} = B$.*

**Berechnung von $A^{-1}$:** Man bringt die Matrix $(A|I)$ auf Zeilennormalform und bekommt $(I|A^{-1})$.

## 13.14 Lineare Abbildungen als Matrizen

Seien $V$ und $W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume von Dimension $m$ bzw. $n$ und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. In $V$ und $W$ seien geordnete[5] Basen $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_m})$ bzw. $C = (\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_n})$

[5] das bedeutet, dass die Reihenfolge der Elemente der Basis wichtig ist

gegeben. Dann gibt es genau eine Matrix bezeichnet durch ${}_C[\phi]_B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit der Eigenschaft

$$\phi\Big(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\vec{b_k}\Big)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\vec{c_j} \iff {}_C[\phi]_B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

${}_C[\phi]_B$ heißt dann Matrix zu $\phi$ bzgl. der Basen $B$ und $C$ .

**Satz 13.5.** *Seien $U, V, Z$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $B$ (bzw. $C$, bzw. $D$) eine Basis in $U$ (bzw. $V$, bzw. $C$). Seien $\phi : U \to V$, $\psi : V \to Z$ lineare Abbildungen. Dann*

$${}_D[\psi\circ\phi]_B =_D [\psi]_C\ {}_C[\phi]_B.$$

# 14 Skalarprodukt und Orthogonalität

## 14.1 Skalarprodukte

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : V\times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(S1) $\forall x, y \in V$: $(x|y) = \overline{(y|x)}$,

(S2) $\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$,

(S3) $\forall x \in V\setminus\{0\}$: $(x|x) > 0$.

heißt ein Skalarprodukt auf $V$. (Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und also $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden, da $\overline{r} = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.)

## 14.2 Eigenschaften

Eigenschaften eines Skalarproduktes auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ sind

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$, $(x|0) = (0|x) = 0$,
$\forall x, y \in V : |(x|y)| \le \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

## 14.3 Normen

Ist $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, so hat die Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$, $v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ folgende Eigenschaften:

(N1) $\forall v \in V$: $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$,

(N2) $\forall v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, (N3) $\forall u, v \in V$: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

**Definition 14.1.** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften (N1)–(N3) heißt eine Norm auf $V$.*

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $V$, so wird für $u, v \in V$ die Zahl $\|u - v\| \geq 0$ als **Abstand** von $u$ und $v$ interpretiert, und es gilt $\|0\| = 0$, sowie

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \text{(umgekehrte Dreiecksungleichung).}$$

## 14.4 Orthogonalität und Gram-Schmidt Verfahren

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ heißen orthogonal, falls für alle $j, k \in \{1, 2 \ldots, m\}$ mit $j \neq k$ gilt $(v_j|v_k) = 0$. Statt $(v|w) = 0$ schreibt man auch $v \perp w$.

Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m$ heißen orthonormal , oder ein Orthonormalsystem (ONS), falls für alle $j, k$ gilt: $(v_j|v_k) = \delta_{jk}$, dh also falls die Vektoren orthogonal sind und zusätzlich alle Norm 1 haben.

Ist $V$ endlich-dimensional, so ist eine Orthonormalbasis (ONB) von $V$ eine Basis von $V$, die ein Orthonormalsystem ist.

**Satz 14.1.** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ orthogonal. Dann sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Ist $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ein Orthonormalsystem in $V$ und $v \in lin\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, dann gilt*

$$v = \sum_{j=1}^{m} (v|v_j) v_j.$$

### Gram-Schmidt Verfahren

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ seien linear unabhängig.

Wir setzen $b_1 := v_1/\|v_1\|$ und für $k = 2, \ldots, m$:

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k|b_j) b_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|},$$

Dann $\text{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ist ein Orthonormales System.

**Folgerung 14.1.** *Jeder endlichdimensionale Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.*

## 14.5 Transponierte und adjungierte Matrizen

Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times m}$, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die transponierte Matrix zu $A$ und wird mit $A^T$ bezeichnet. Für alle $k \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ steht an der Stelle $(k,j)$ in der Matrix $A^T$ also der Eintrag $a_{jk}$, der in der Matrix $A$ an der Stelle $(j,k)$ steht. Setzen wir $B := A^T$ mit $B = (b_{kj})_{k=1}^{n}{}_{j=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$, so gilt also

$$b_{kj} = a_{jk}, \quad k \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{C}^{n\times m}$, für die an jeder Stelle $(k,j)$ der Eintrag $\overline{a_{jk}}$ steht, die adjungierte Matrix zu $A$ und wird mit $A^*$ bezeichnet.

**Bemerkung 14.1.** *Setzt man $\overline{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (konjugiert komplexe Matrix zu $A$), so gilt also*

$$A^* = \overline{A^T} = \left(\overline{A}\right)^T.$$

**Schreibweisen des Standardskalarprodukts:** Für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^T\vec{x} = \vec{x}^T\vec{y}$.
Für $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n\times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^*\vec{x} = \overline{\vec{x}^*\vec{y}}$.

**Rechenregeln:** Für Matrizen $A, B$, deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^TA^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Für eine invertierbare Matrix $A$ sind auch $A^T$ und $A^*$ invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

**Folgerung 14.2.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt:*

*(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$.*

*(b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^*\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$.*

## 14.6 Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine wichtige Rolle spielen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, deren zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, das Skalarprodukt invariant lässt, dh für die gilt:

$$(A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

Damit verändert $A$ auch Winkel und Abstände nicht. Eine solche Matrix $A$ hat Kern $A = \{\vec{0}\}$, ist also invertierbar. Aus den Rechenregeln folgt

$$A^TA = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \qquad A^*A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dieser Eigenschaft heißt orthogonal (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. unitär (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Somit gilt

$$A^T = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ orthogonal}, A^* = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ unitär.}$$

**Bemerkung 14.2.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

*1) $A$ ist genau dann unitär, wenn die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden.*

*2) $A$ ist genau dann unitär, wenn für jedes Orthonormalsystem $v_1, \ldots, v_m$ in $\mathbb{C}^n$ auch $Av_1, \ldots, Av_m$ ein Orthonormalsystem von $\mathbb{C}^n$ ist.*

*3) Produkte, Inverse, Transponierte und Adjungierte von unitären Matrizen sind unitär.*

**(Erweiterung) Bemerkung:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ [bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$].

1) $A$ ist genau dann orthogonal [bzw. unitär], wenn die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ [bzw. $\mathbb{C}^n$] bilden.

## 14.7 Orthogonalprojektionen

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ein Orthonormalsystem in $V$ und $U := \text{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Die lineare Abbildung

$$P : V \to U, v \mapsto Pv = \sum_{j=1}^{m} (v|b_j)b_j$$

hat die Eigenschaften: $P \circ P = P$, $\text{Bild}\, P = U$, $\text{Kern}\, P = \{v \in V : v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$.

Es gilt $(v - Pv|u) = 0$ für alle $u \in U$, $v \in V$, und

$$\|v - Pv\| = \min\{\|v - u\| : u \in U\} \quad \text{für jedes } v \in V,$$

dh $Pv$ ist die (eindeutig bestimmte) Bestapproximation von $v$ in $U$. Die Abbildung $P$ heißt Orthogonalprojektion von $V$ auf $U$.

# 15 Determinanten

## 15.1 Definierende Eigenschaften der Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$,

(D2) für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha\vec{a}_j + \beta\vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n) = \alpha\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \beta\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n),$$

(D3) Wenn wir zwei Spalten (Vektoren) vertauschen, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

**Bemerkung 15.1.** *Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante* $\det$ *eindeutig bestimmt.*

**Schreibweise:** Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden $\det$ meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Man kann auch die definierenden Eigenschaften mit Hilfe der Zeilen anstatt der Spalten definieren.

## 15.2 Folgerungen

(a) Ist eine Spalte $= 0$, so ist auch die Determinante $= 0$.

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Hat die Matrix zwei gleiche Spalten, dann hat sie Determinante Null.

(d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ linear abhängig (dh gilt $\operatorname{Rang} A < n$), so ist $\det(A) = 0$.

(e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

Alle obige Folgerungen gelten wenn Spalten durch Zeilen ersetzt werden.

## 15.3 Der Fall $n = 2$

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

## 15.4 Der Fall $n = 3$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = avz + bwx + cuy - awy - buz - cvx.$$

**Schema:**

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & a & b & c & & & \\
 & & w & u & v & w & u & & \\
 & y & z & x & y & z & x & y & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\
- & - & - & & & & + & + & +
\end{array}
$$

## 15.5 Der allgemeine Fall

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit den Einträgen $a_{jk}$. Für jedes $k \in \{1,\ldots,n\}$ bezeichne $A_{1k} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die aus $A$ durch Streichen der ersten Zeile und der $k$-ten Spalte entsteht.

Man hat die folgende Formel, die das Berechnen von $\det(A)$ auf das Berechnen der Determinanten kleinerer Matrizen zurückführt:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$$

## 15.6 Determinantenentwicklungssatz

Für jedes $l \in \{1,\ldots,n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus $A$ durch Streichen der $j$-ten Zeile und der $k$-ten Spalte entsteht.

## 15.7 Determinantenmultiplikationssatz

Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Insbesondere gilt für eine invertierbare Matrix $A$: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

## 15.8 Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme

Sei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar mit den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, die eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, mit:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots, \vec{a}_n)/\det(A), \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

## 15.9 Eine Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar mit Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Big( \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{e}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \Big)_{j,k=1}^{n}.$$

## 15.10 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) in $\mathbb{R}^3$

Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

(0) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

(1) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

(2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$ und $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y}$, dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig sind.

**Berechnung:** Man berechnet $\vec{x} \times \vec{y}$ formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

## 15.11 Das Spatprodukt

Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ heißt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y} | \vec{z})$ das Spatprodukt von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

**Satz 15.1.** *Es gilt* $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

# Index