Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011
21.04.2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3,\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y \\ ix+y \\ 3x-4iy \end{pmatrix}$

b) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y+2 \\ ix+y \end{pmatrix}$

c) $P_{\vec{a}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ P_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{a},$ wobei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$.

Geben Sie im Falle der Linearität die Darstellungsmatrix von f bzw. $P_{\vec{a}}$ bezüglich der kanonischen Basen an.

Aufgabe 2

Die lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\,, \qquad \phi(\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \vec{e}_1\,, \qquad \phi(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3\,.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Im Vektorraum $C^2((-\pi,\pi))$ der auf $(-\pi,\pi)$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen seien die Funktionen $v_1, v_2, v_3, v_4\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v_1(x) = \sin x, \qquad v_2(x) = \cos x, \qquad v_3(x) = x\sin x, \qquad v_4(x) = x\cos x.$$

a) Zeigen Sie, dass $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von $W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist.

b) Für $f \in W$ definiere $D(f) := f'$. Begründen Sie, dass D von W nach W abbildet, und zeigen Sie, dass die Abbildung $D\colon W \to W, f \mapsto f'$, linear ist.

c) Geben Sie die Darstellungsmatrix von $D\colon W \to W$ und $D^2\colon W \to W$ bezüglich der Basis B von W an. (Dabei ist $D^2(f) := D(D(f))$ für $f \in W$.)

d) Sei $g\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x\sin x + 5\cos x$. Berechnen Sie $D^2(g)$ mit Hilfe der Darstellungsmatrix aus Teil **c)** und führen Sie eine Probe Ihrer Rechnung durch.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\vartheta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \vartheta(\vec{x}) := \vec{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Seien V, W Vektorräume, $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von W bildet.

Aufgabe 6

a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A+B, \quad A+C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A+B)C, \quad A^*C, \quad C^TB.$$

b) Seien $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

i) Geben Sie $\vec{x} \cdot (A\vec{y})$ im Fall $n = 3$ explizit an.

ii) Vereinfachen Sie $\vec{x}^T(A - A^T)\vec{x}$ sowie $\vec{x}^T(A + A^T)\vec{x}$.

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$. Bestimmen Sie alle Matrizen $L \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ mit $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.