Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011
19.05.2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Kurve $\vec{r}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad (t \in [-1,1]).$$

a) Sei $t_0 \in (-1,1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\vec{r}(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{r}$ und bestimmen Sie die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge aller Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, die den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x + z = 1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an und berechnen Sie eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge. Bestimmen Sie außerdem in jedem Kurvenpunkt den Tangentialvektor.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{xy}$

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto xe^y/z$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f$ von f in Richtung $\vec{v} := (1,1)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante $\det J_{\vec{f}}$ von

$$\vec{f}\colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}} f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 6

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $\vec{u} := (1,2)$ und $\vec{v} := (-1,1)$ gelte

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = -1\,, \qquad D_{\vec{v}} f(x_0,y_0) = 2\,.$$

Bestimmen Sie $D_{\vec{w}} f(x_0,y_0)$ für $\vec{w} := (1,1)$. Geben Sie die Richtung $\vec{h}$ mit $\|\vec{h}\| = 1$ an, für die $D_{\vec{h}} f(x_0,y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 7

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $D_1 D_2 f(0,0)$ und $D_2 D_1 f(0,0)$.

Achtung: Ab sofort finden die Freitagsveranstaltungen von 13:30 bis 15:00 statt.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am Montag, den 19.09.2011, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 15.07.2011.**
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etecphys2011s/.